Московский Физико-Технический Институт
(государственный университет)

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-центр»

58-я выездная физико-математическая олимпиада МФТИ

Решения задач

Москва 2019

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ
2018-2019 уч. года
Физика
Задания, решения

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 4 часа (на оба предмета).

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи (из 7) на выбор проводящего олимпиаду.

Каждая задача по физике оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

Максимальное число баллов за олимпиаду 40.

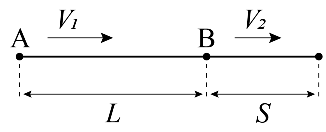
Общие принципы выставления оценки по физике:

- правильное решение — 10 баллов;
- решение с недочетами — 7-9 баллов;
- решение с пропущенными важными частями — 3-5 баллов;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

Ф8.1 Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии $L = 50$ км друг от друга вдоль прямолинейного участка шоссе, одновременно в одном направлении начали двигаться два мотоциклиста. Из пункта A мотоциклист едет по направлению к пункту B со скоростью $V_1 = 90$ км/ч, а мотоциклист из пункта B — со скоростью $V_2 = 60$ км/ч. На каком расстоянии от пункта B мотоциклисты встретятся?

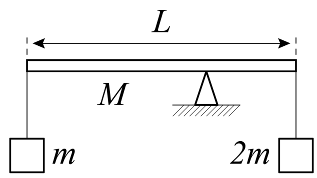
Решение. Пусть S — искомое расстояние, T — время движения мотоциклистов. Тогда $T = \dfrac{S}{V_2}$, $L + S = V_1 T$, откуда $L + S = \dfrac{V_1 S}{V_2}$, и $S = \dfrac{L}{\frac{V_1}{V_2} - 1} = \dfrac{50}{\frac{90}{60} - 1} = 100$ км.



Ф8.2 Вася прошел 2/3 пути со скоростью $V_1 = 5$ км/ч, а оставшуюся часть пути пробежал с постоянной скоростью. С какой скоростью бежал Вася, если его средняя скорость на всем пути составила $V_{\text{ср}} = 6$ км/ч?

Решение. Пусть t_1 — время ходьбы, t_2 — время бега. С учётом $t_1 = \dfrac{2L}{3V_1}$ и $t_2 = \dfrac{L}{3V_2}$ находим $V_{\text{ср}} = \dfrac{L}{t_1 + t_2} = \dfrac{1}{\frac{2}{V_1} + \frac{1}{V_2}}$, откуда $V_2 = \dfrac{V_1 V_{\text{ср}}}{3V_1 - 2V_{\text{ср}}} = \dfrac{5 \cdot 6}{3 \cdot 5 - 2 \cdot 6} = 10$ км/ч.

Ф8.3 Однородная доска массой M и длиной L положена на опору и находится в равновесии (см. рис.). На левом конце доски подвешен груз массой m, а на правом — груз массой $2m$. Найти расстояние между опорой и правым концом доски.



Решение. Пусть L — искомое расстояние. Центр масс доски находится на расстоянии $\left(\dfrac{L}{2} - l\right)$ слева от опоры.
Условие равновесия доски: $mg(L - l) + Mg\left(\dfrac{L}{2} - l\right) = 2mgl$, откуда $l = \dfrac{M + 2m}{2M + 6m} L$.

Ф8.4 Шарик взвешивают с помощью динамометра. Первый раз шарик взвесили в воздухе, а второй раз в жидкости с плотностью $\rho_{\text{ж}} = 0{,}8$ г/см^3. Вес шарика в воздухе оказался в 3 раза больше, чем вес в жидкости. Определите плотность материала шарика.

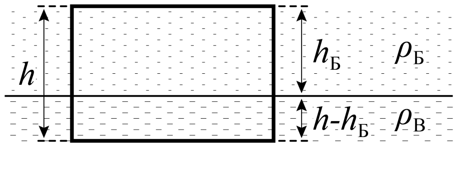
Решение. Вес шарика в воздухе: $P_{\text{воз}} = mg = \rho V g$, где V — объем шарика. Вес шарика в жидкости: $P_{\text{ж}} = mg - g\rho_{\text{ж}} V = \rho V g - g\rho_{\text{ж}} V$. Из условия $P_{\text{воз}} = 3P_{\text{ж}}$ можем записать $\rho V g = 3\rho V g - 3g\rho_{\text{ж}} V$, и тогда $3\rho_{\text{ж}} = 2\rho$, откуда $\rho = \dfrac{3}{2}\rho_{\text{ж}} = \dfrac{3}{2} \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ г/см^3.

Ф8.5 Деревянная пластина толщиной $h = 3$ см плавает в сосуде с водой. Сверху наливают бензин так, что уровень бензина совпадает с верхней поверхностью пластины. Бензин с водой не перемешиваются. Найти высоту налитого слоя бензина. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м^3, плотность дерева $\rho_{\text{д}} = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность бензина $\rho_{\text{б}} = 0{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Условие равновесия пластины:

$$g\rho_{\text{д}} S h = g\rho_{\text{б}} S h_{\text{б}} + g\rho_{\text{в}} S (h - h_{\text{б}}),$$

откуда $h_{\text{б}} = \dfrac{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{б}}} h = \dfrac{1 - 0{,}8}{1 - 0{,}7} \cdot 3 = 2$ см.



Ф8.6 В сосуд налита вода массы $m_{\text{в}} = 5$ кг с температурой $t_{\text{в}} = 70°C$. В воду положили лед массы $m_{\text{л}} = 1$ кг с температурой $t_{\text{л}} = -20°C$. Пренебрегая потерями тепла, найти установившуюся температуру воды в сосуде.

Удельная теплоёмкость воды $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг$\cdot {}^\circ C$), удельная теплоёмкость льда $c_л = 2{,}1 \cdot$ $\cdot\, 10^3$ Дж/(кг$\cdot {}^\circ C$), удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

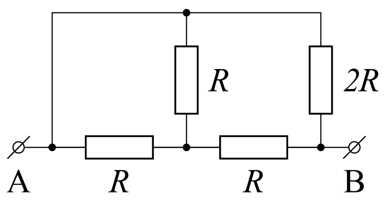
Решение. Уравнение теплового баланса:

$$c_в m_в (t_в - t) = c_л m_л (0 - t_л) + \lambda m_л + c_в m_л t \Leftrightarrow$$

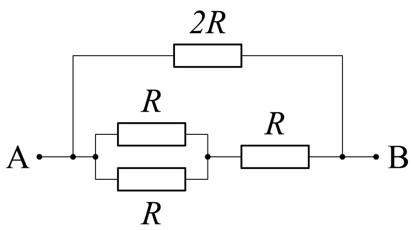
$$\Leftrightarrow t(c_в m_л + c_в m_в) = c_в m_в t_в + c_л m_л t_л - \lambda_л$$

Находим $t = \dfrac{c_в m_в t_в + c_л m_л t_л - \lambda_л}{c_в m_л + c_в m_в} = \dfrac{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 70 + 2{,}1 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot (-20) - 3{,}4 \cdot 10^5 \cdot 1}{4{,}2 \cdot 10^3 \cdot (5+1)} \approx 43^\circ C$.

Ф8.7 Найти сопротивление электрической цепи между точками A и B. Сопротивление $R = 1$ Ом.



Решение. Эквивалентная схема:



Сопротивление нижней ветви $R_1 = \dfrac{R}{2} + R = \dfrac{3}{2}R$, откуда $R_{AB} = \dfrac{R_1 \cdot 2R}{R_1 + 2R}$. Находим тогда $R_{AB} = \dfrac{\frac{3}{2}R \cdot 2R}{\frac{3}{2}R + 2R} = \dfrac{3}{7/2}R = \dfrac{6}{7}R \approx 0{,}86$ Ом.

Ф9.1 К перекрестку по двум взаимно перпендикулярным шоссейным дорогам движутся равномерно грузовая и легковая автомашины со скоростями $V_1 = 15$ м/с и $V_2 = 20$ м/с соответственно. В некоторый момент времени автомашины находятся от перекрестка на расстояниях $S_1 = 300$ м и $S_2 = 275$ м. Через какое время T расстояние между автомашинами будет наименьшим?

Решение. Квадрат расстояния между машинами $r^2 = (-S_1 + V_1 t)^2 + (-S_2 + V_2 t)^2$ достигает экстремума в момент времени $T = \dfrac{S_1V_1 + S_2V_2}{V_1^2 + V_2^2} = 16$ с.

Ф9.2 С высокой башни с интервалом $\tau = 1$ с бросают с нулевой начальной скоростью два камня. На каком расстоянии S друг от друга будут находиться камни в тот момент, когда скорость второго камня станет равной $V = 30$ м/с?
Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

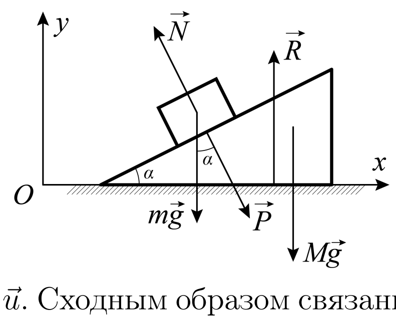
Решение. Скорость второго камня будет по величине равна $V = 30$ м/с через $\dfrac{V}{g} = 3$ с$= 3\tau$ после старта второго камня. В этот момент расстояние между камнями $S = \dfrac{g}{2}\left[(4\tau)^2 - (3\tau)^2\right] = = \dfrac{7}{2}g\tau^2 = 35$ м.

Ф9.3 Камень вылетает из метательной машины со скоростью $V_1 = 39$ м/с и через $T = 4{,}2$ с попадает в цель. В этот момент скорость камня $V_2 = 45$ м/с. На каком расстоянии L по горизонтали от машины находится цель?
Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

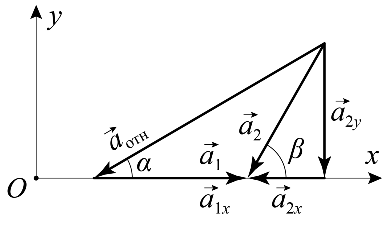
Решение. Из треугольника скоростей $\vec{V_2}(T) = \vec{V_1} + \vec{g}T$ и теоремы косинусов находим проекцию начальной скорости на горизонтальное направление $V_{1,x} = 36$ м/с (угол, под которым камень брошен к горизонту, таков, что $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$). Тогда $L = V_1 T\cos\alpha = 36\cdot 4{,}2 \approx 151$ м.

Ф9.4 По клину массой M, находящемуся на гладкой горизонтальной плоскости, скользит шайба массой m. Гладкая наклонная плоскость клина составляет с горизонтом угол α. Определите величину P силы, с которой шайба действует на клин. Ускорение свободного падения g.

Решение. Найдем величину a_1 ускорения клина.



Для определения ускорения клина рассмотрим движение каждого из тел. Силы, приложенные к телам, указаны на рисунке. Запишем второй закон Ньютона для клина: $M\vec{a}_1 = M\vec{g} + \vec{P} + \vec{R}$ и для шайбы: $m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N}$. Переходя к проекциям сил и ускорений на оси ЛСО с учетом $\vec{P} = -\vec{N}$, получаем $Ma_{1,x} = N\sin\alpha$; $ma_{2,x} = -N\sin\alpha$.
Скорость $\vec{v}_2$ шайбы в ЛСО, скорость $\vec{u}$ шайбы относительно клина и скорость $\vec{v}_1$ клина связаны законом сложения скоростей $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{u}$. Сходным образом связаны соответствующие ускорения $\vec{a}_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{\text{отн}}$.



Из треугольника ускорений следует $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_{2,y}}{a_{2,x} - a_{1,x}}$.
Подставляя в последнее равенство выражения для проекций ускорения шайбы $a_{2,x} = -\dfrac{M}{m}a_{1,x}$ и $a_{2,y} = -g + a_{1,x}\dfrac{M}{m}\operatorname{ctg}\alpha$, после несложных преобразований приходим к ответу на вопрос задачи: $a_{1,x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{m\sin 2\alpha}{M + m\sin^2\alpha}g$.

Далее, из уравнения движения клина $Ma_{1,x} = P\sin\alpha$ находим $P = \dfrac{mg\cos\alpha}{1 + \frac{m}{M}\sin^2\alpha}$.

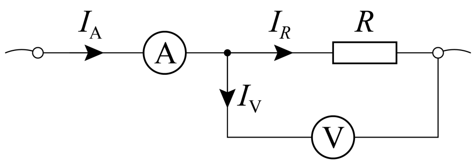
Ф9.5 Стальной кубик плавает в ртути. Поверх ртути наливают воду так, что она только покрывает кубик. Какова высота h слоя воды? Длина ребра кубика $b = 10$ см, плотность стали $\rho_1 = 7{,}8$ г/см^3, плотность ртути $\rho_2 = 13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_3 = 1$ г/см^3.
Примечание. Параллельность грани куба поверхности воды при плавании обеспечивается незначительными внешними усилиями.

Решение. Равенство сил тяжести и Архимеда $\rho_1 b^3 g = (\rho_2(b-h)b^2 + \rho_3 h b^2)g$ приводит к ответу на вопрос задачи $h = b\dfrac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_3 - \rho_2} \approx 0{,}046$ м.

Ф9.6 В калориметр, содержащий $m_1 = 100$ г льда при $t_1 = 0°$, наливают $m_2 = 150$ г воды при температуре $t_2 = 50°$. Определите установившуюся в калориметре температуру t. Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/(кг$\cdot$ К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Для того, чтобы расплавить весь лед, к нему следует подвести $Q_1 = m_1\lambda = 33 \cdot 10^3$ Дж теплоты. Вода, остывая до $t_0 = 0°C$, отдаст $Q_2 = m_2 c(t_2 - t_0) = 31{,}5 \cdot 10^3$ Дж теплоты. Следовательно, лед массой $m_1\dfrac{Q_2}{Q_1} \approx 95$ г растает. В калориметре установится температура $t_0 = 0°C$. Содержимое калориметра: 5 г льда и 245 г воды.

Ф9.7 Для измерения сопротивления R проводника собрана электрическая цепь (см. схему на рис.). Вольтметр V показывает напряжение $U_V = 5$ В. Показание амперметра A равно $I_A = 25$ мА. Найдите величину R сопротивления проводника. Внутреннее сопротивление вольтметра $R_V = 1{,}0$ кОм.



Решение. Сила тока, текущего через вольтметр, $\dfrac{U_V}{R_V}$. Тогда через исследуемое сопротивление течет ток силой $\left(I_A - \dfrac{U_V}{R_V}\right)$. Напряжение на исследуемом сопротивлении U_V. По закону Ома для однородного участка цепи $R = \dfrac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}} = 250$ Ом.

Ф10.1 Винт вентилятора в момент начала торможения вращается с угловой скоростью $\omega = 25$ с$^{-1}$ и через $\tau = 10$ с останавливается. Сколько оборотов совершит винт за время торможения? Считайте, что в процессе торможения угловая скорость винта уменьшается равномерно по времени.

Решение. Угловая скорость вращения винта уменьшается от начальной величины ω до нуля равномерно по времени, следовательно, угол поворота винта за время торможения $\Phi = \frac{\omega\tau}{2}$, число оборотов винта $N = \frac{\Phi}{2\pi} = \frac{\omega\tau}{4\pi} \approx 20$.

Ф10.2 Из одной точки одновременно бросают два камня с одинаковыми по величине начальными скоростями. Первый камень брошен под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, второй — вертикально вверх. Через $\tau = 2$ с после старта камни находятся на расстоянии $S = 60$ м друг от друга. Найдите максимальное расстояние S_{max} между камнями в процессе полета камней. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Силу сопротивления воздуха считайте пренебрежимо малой.

Решение. В системе отсчета, связанной с первым камнем, второй движется с постоянной скоростью, равной начальной относительной. Из треугольника начальных скоростей следует $U_{\text{отн}} = V_0$. Отсюда $V_0 = \frac{S}{\tau} = 30$ м/с. Первый камень упадет на землю через $T = 2\frac{V_0 \sin\alpha}{g} = 3$ с, тогда $S_{max} = V_0 T = 90$ м.

Ф10.3 Мешок с песком падает вертикально со скоростью $V = 5$ м/с на массивную тележку, движущуюся горизонтально со скоростью $U = 1{,}5$ м/с. Мешок после удара не подскакивает. При каком наименьшем коэффициенте трения скольжения μ мешок не будет проскальзывать по тележке после обращения в ноль его вертикальной составляющей скорости? Длительность соударения очень мала.

Решение. Импульсы сил нормальной реакции и трения за время «прилипания» мешка к тележке равны по величине соответственно

$$\sum_i N_i \Delta t_i = mV; \; \sum_i F_{\text{тр},i} \Delta t_i = mU,$$

где суммирование ведется по времени «прилипания». Процесс считаем столь быстрым, что импульсом силы тяжести можно пренебречь. В этом процессе в любой момент времени происходит проскальзывание, следовательно, $F_{\text{тр},i} = \mu N_i$. Также в μ раз отличаются импульсы сил трения и нормальной реакции за всё время «прилипания» мешка к тележке: $mU = \mu mV$. Отсюда $\mu = \frac{U}{V} = \frac{1,5}{5} = 0{,}3$.

Ф10.4 При какой продолжительности T суток на Земле вес тела на экваторе будет вдвое отличаться от веса этого же тела на полюсе?
Землю считайте однородным шаром. Радиус Земли $R = 6{,}4 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения у поверхности планеты $g = 10$ м/с^2.

Решение. Вес тела на полюсе $P_{\text{п}} = mg$. Вес тела на экваторе $P_{\text{э}} = m(g - \omega^2 R)$. По условию $P_{\text{п}} = 2P_{\text{э}}$. Отсюда $\frac{\omega^2 R}{g} = \frac{1}{2}$. Тогда $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\sqrt{2}\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 7{,}1 \cdot 10^3$ с.

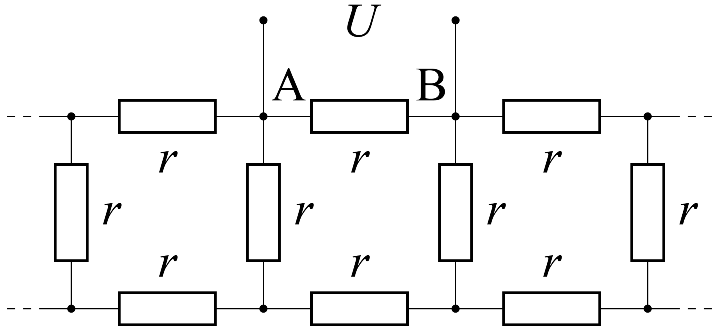
Ф10.5 Найдите массу m оболочки наполненного водородом резинового шарика диаметром $d = 25$ см, свободно плавающего в воздухе. Воздух и водород находятся при нормальных условиях: $t = 0°C$, $P = 10^5$ Па. Молярная масса водорода $\mu_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, молярная масса воздуха $\mu_2 = 29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К). Объем шара V связан с диаметром d соотношением $V = \dfrac{\pi d^3}{6}$.

Решение. «Условие воздухоплавания»: $mg + \rho_1 V g = \rho_2 V g$. С учётом уравнения состояния $P = \dfrac{\rho}{\mu} RT$ находим искомое значение $m = \dfrac{\pi d^3}{6} \dfrac{P(\mu_2 - \mu_1)}{R(t + 273)} \approx 0{,}01$ кг.

Ф10.6 Два одинаковых металлических шара расположены на большом расстоянии. Заряд одного из шаров Q, другой не заряжен. Проводящий незаряженный шарик последовательно приводят в контакт сначала с заряженным шаром, затем с незаряженным. После двух контактов заряд шарика становится равным $Q/9$.
Какой заряд q перешел на шарик при первом контакте?

Решение. Суммарный заряд делится в одном и том же отношении $\dfrac{Q-q}{q} = \dfrac{q - \frac{Q}{9}}{\frac{Q}{9}}$, $q = \dfrac{Q}{3}$.

Ф10.7 Электрическая цепь (см. схему на рисунке) состоит из очень большого («бесконечного») числа одинаковых звеньев, содержащих сопротивления $r = 1$ Ом. К точкам A и B подключают источник постоянного напряжения $U = 1{,}5$ В. Какое количество теплоты Q будет ежесекундно выделяться в цепи?



Решение. Эквивалентное сопротивление R «полубесконечной» цепочки равно $R = (1 + \sqrt{3})r \approx 2{,}73r = 2{,}73$ Ом.
Параллельное соединение r и R приводит к эквивалентному сопротивлению $(\sqrt{3} - 1)r$.
Далее, $\dfrac{1}{R_{AB}} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r + 2(\sqrt{3} - 1)r}$, отсюда $R_{AB} = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right) r \approx 0{,}71r = 0{,}71$ Ом. Тогда $Q = \dfrac{U^2}{R_{\text{экв}}} = 3{,}17$ Вт.

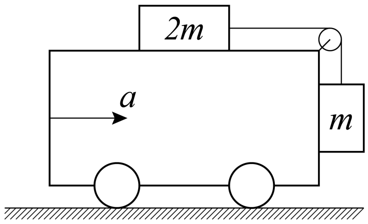
Ф11.1 Мяч лежит на горизонтальной поверхности земли на расстоянии $L = 4$ м от вертикального забора высотой $H = 1{,}5$ м. Мальчик сообщает мячу скорость под углом к горизонту в сторону забора. В результате мяч перелетает через забор, почти касаясь его на максимальной высоте своего полета.

1) Найти время τ продолжительности полета мяча от его вылета до падения на землю за забором.

2) Найти начальную скорость V, с которой мяч вылетел с поверхности земли. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

Решение. 1) $H = \frac{1}{2}g\left(\frac{\tau}{2}\right)^2$. Отсюда $\tau = \sqrt{\frac{8H}{g}} \approx 1{,}1$ с. 2) $2L = V\tau\cos\alpha$, $(V\sin\alpha)^2 = 2gH$. С учётом выражения для τ, получаем $V = \sqrt{\frac{4L^2g}{8H} + 2gH} \approx 9{,}1$ м/с.

Ф11.2 Бруски массами m и $2m$ связаны легкой нитью, перекинутой через блок. Блок укреплен на тележке (см. рис.). Верхняя горизонтальная поверхность тележки гладкая, коэффициент трения между вертикальной поверхностью тележки и бруском массой m равен $\mu = 0{,}5$. С каким минимальным горизонтальным ускорением a надо двигать тележку, чтобы брусок массой m поднимался вверх? Массой блока и трением в его оси пренебречь.



Решение. $T = 2ma$, $T - mg - \mu N = 0$, $N = ma$. Отсюда находим $a = \frac{2}{3}g \approx 6{,}5$ м/с^2.

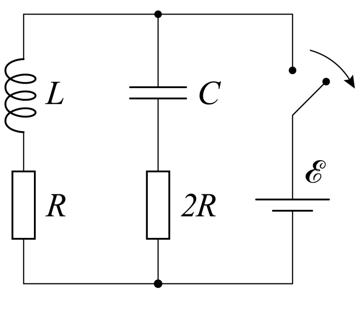
Ф11.3 Идеальный одноатомный газ в количестве ν (моль) расширяется от температуры $T_1 = T$ до температуры $T_2 = 1{,}2T$ в процессе с прямо пропорциональной зависимостью давления от объема. Далее газ нагревают изохорически до температуры $T_3 = 1{,}6T$. Какое количество теплоты получил газ во всем процессе?

Решение. $Q_{12} = \nu\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}P_2V_2 - \frac{1}{2}P_1V_1 = 2\nu R(T_2 - T_1) = 0{,}4\nu RT$, $Q_{23} = \nu\frac{3}{2}R(T_3 - T_2) = 0{,}6\nu RT$.
Далее, $Q_{123} = Q_{12} + Q_{23} = \nu RT$.

Ф11.4 Плоская катушка из $n = 7$ витков находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл, направленной перпендикулярно плоскости витков катушки. Катушка замкнута на гальванометр. Катушку выносят из магнитного поля. Какой заряд пройдет через гальванометр? Площадь одного витка $S = 2$ см^2. Сопротивление витков катушки, подводящих проводов и гальванометра $R = 4$ Ом.

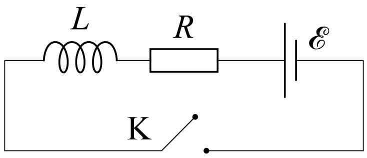
Решение. $q = \frac{BSn}{R} = 3{,}5$ мкКл.

Ф11.5 Параметры идеальных элементов цепи указаны на схеме (см. рис.). Ключ замкнут, режим в цепи установился. Какое количество теплоты выделится в цепи после размыкания ключа?



Решение. В установившемся режиме ток в катушке $I_L = \frac{\mathscr{E}}{R}$, напряжение на конденсаторе $U_C = \mathscr{E}$. Количество теплоты $Q = \frac{1}{2}LI_L^2 + \frac{1}{2}CU_C^2 = \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2\left(\frac{L}{CR^2} + 1\right)$.

Ф11.6 В электрической цепи, схема которой приведена на рисунке, все элементы идеальные. Параметры элементов указаны на схеме. Ключ K замыкают. В некоторый момент времени ток в цепи становится в 4 раза меньше максимального.

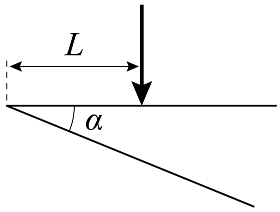


1) Найти напряжение на катушке индуктивности L в этот момент времени.

2) Чему равна скорость P изменения энергии в катушке в этот момент времени?

Решение. Максимальный ток $I_M = \dfrac{\mathscr{E}}{R}$; 1) $U_L = \mathscr{E} - \dfrac{I_M}{4}R = \dfrac{3}{4}\mathscr{E}$; 2) $P = U_L\dfrac{I_M}{4} = \dfrac{3}{16}\dfrac{\mathscr{E}^2}{R}$.

Ф11.7 На горизонтальную поверхность клиновидной пластинки из стекла по вертикали падает луч света. Расстояние от ребра клина до места падения луча равно $L = 10$ см. Угол при вершине клина $\alpha = 0{,}2$ рад (см. рис.). На каком расстоянии от места падения луч «выйдет» из горизонтальной поверхности пластинки?



Указание. Угол α можно считать малым, так что $\sin\alpha \approx \alpha$.

Решение. $x = L\alpha \cdot 2\alpha = 2L\alpha^2 = 0{,}8$ см.

Выездная физико-математическая олимпиада МФТИ
2018-2019 уч. года
Математика
Задания, решения, критерии оценивания

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 4 часа (на оба предмета).

Черновики не проверяются.

В вариант включаются 4 задачи (из 5) на выбор проводящего олимпиаду.

Каждая задача по математике оценивается целым числом баллов от 0 до 7.

Максимальное число баллов за олимпиаду 28.

Общие принципы выставления оценки по математике:

- правильное решение — 7 баллов;
- решение с недочетами — 5–6 баллов;
- решение с пропущенными важными случаями, либо с доказанным одним из двух (более сложным) утверждений задачи — 4 балла;
- рассмотрение отдельных важных случаев при отсутствии решения — 1 балл;
- доказательство вспомогательных утверждений, помогающих в решении задачи — 2–3 балла.

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В приведенных после решений задач комментариях указаны баллы за типичные продвижения в решении и ошибки. Баллы за отдельные продвижения суммируются, если это не оговорено отдельно.

Обязательно следует сделать объявление, что если это не оговорено специально, то ответы в каждой задаче требуют объяснения.

(из варианта исключается одна из задач 8.2, 8.4)

M8.1 Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на две группы. Произведение чисел в первой группе равно A, а во второй группе — B. Известно, что число $C = \dfrac{A}{B}$ — целое. Какое наименьшее значение может иметь число C?

Ответ. 70.

Решение. Заметим, что числа 5 и 7 могут входить только в первую группу. Остальные числа содержат в качестве простых множителей только 2 и 3. При этом суммарная степень двоек равна 7. А суммарная степень троек равна 4. Поэтому в первую группу двойка входит не меньше чем в 4 степени (так как 7 — нечетно), а тройка не менее чем во 2 степени. Поэтому $C = \dfrac{A}{B} \geq \dfrac{5 \cdot 7 \cdot 2^4}{2^3} = 5 \cdot 7 \cdot 2$. Если же в первую группу входят числа 5, 7, 2, 8, 9, а во вторую — остальные, то $C = \dfrac{5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} = 5 \cdot 7 \cdot 2 = 70$.

Комментарий. Доказано только, что $C \geq 70$ — 4 балла.
Только пример для $C = 70$ — 3 балла.

M8.2 Известно, что 3 калача и 1 баранка стоят дороже 100 рублей, а 1 калач и 13 баранок также стоят дороже 100 рублей. Верно ли, что 1 калач и 4 баранки стоят дороже 50 рублей?

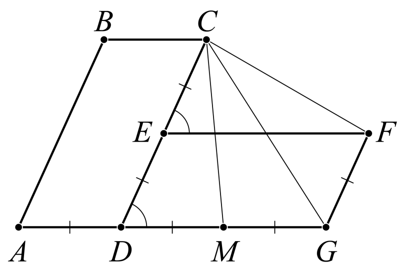
Ответ. Верно.

Решение. Если купить 3 калача и 1 баранку, а потом еще 1 калач и 13 баранок, то всего получится 4 калача и 14 баранок. За них суммарно будет заплачено больше $100 + 100 = 200$ рублей. Но четверть от 4 калачей и 14 баранок — это 1 калач и 3,5 баранки; они будут стоить больше $200 : 4 = 50$ рублей. Поэтому 1 калач и 4 баранки тем более стоят дороже 50 рублей.

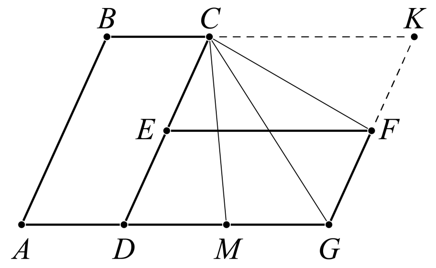
Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

M8.3 Пусть $ABCD$ и $DEFG$ — параллелограммы такие, что точка D лежит на отрезке AG, точка E — на отрезке DC, и при этом $AB = DG = 2AD = 2DE$. Пусть M — середина отрезка DG. Докажите, что CG — биссектриса угла MCF.

Первое решение. Из условия следует, что $CE = DM = CD/2$ и $EF = DG$ (см. рис.). Кроме того, $\angle CEF = \angle CDM$ как соответственные при параллельных прямых EF и DG. Значит, треугольники CEF и MDC равны по первому признаку, откуда $CM = CF$. Тогда по третьему признаку равны треугольники FCG и MCG, откуда и следует утверждение задачи.



Второе решение. Продлим отрезки GF и BC до пересечения в точке K (см. рис.). Тогда в параллелограмме $CDGK$ имеем $CD = GD$, то есть он — ромб. При этом, так как $GF = CD/2$, точки M и F — середины сторон этого ромба. Значит, углы MCG и FCG симметричны относительно диагонали CG и потому равны.



Комментарий. Доказано, что треугольники CEF и MDC равны — 3 балла.

M8.4 Можно ли расположить по кругу числа 0, 1, 2, …, 9 так, чтобы сумма любых трех последовательных чисел была не больше 14?

Ответ. Нельзя.

Решение. Разобъем все числа, кроме 0, на три последовательные тройки. В них сумма чисел не больше 42, а она равна сумме всех чисел.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

M8.5 На столе лежат 300 монет. Петя, Вася и Толя играют в следующую игру. Они ходят по очереди в следующем порядке: Петя, Вася, Толя, Петя, Вася, Толя, и т. д. За один ход Петя может взять со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, Вася — 1 или 2 монеты, а Толя — тоже 1 или 2 монеты. Могут ли Вася и Толя договориться так, что, как бы ни играл Петя, кто-то из них двоих заберет со стола последнюю монету?

Ответ. Не могут.

Решение. Покажем, как играть Пете, чтобы он смог забрать со стола последнюю монету независимо от игры Васи и Толи. Пусть первым ходом Петя возьмет 4 монеты. Заметим, что Вася и Толя за свои ходы суммарно могут взять от 2 до 4 монет. Это значит, что после первого хода Толи на столе останется от 292 до 294 монет. После этого Пете нужно взять 2, 3 или 4 монеты так, чтобы на столе осталось 290 монет. А теперь, если Вася и Толя будут брать суммарно 2, 3 или 4 монеты, Пете нужно брать соответственно 3, 2 или 1 монету, чтобы после каждого его хода число монет, остающихся на столе, делилось на 5. Таким образом, он оставит 285, 280, ..., 5 и, наконец, 0 монет, то есть заберет со стола последнюю монету.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.
Верная стратегия без обоснования — 3 балла.

(из варианта исключается одна из задач 9.2, 9.4)

M9.1 Найдите какое-нибудь натуральное число N такое, что если к нему прибавить его наибольший делитель, отличный от N, то получится 1212.

Ответ. Например, 808.

Решение. Если N — четное, то его наибольший делитель (отличный от N) есть $\frac{N}{2}$, а их сумма — $\frac{3N}{2}$, откуда $\frac{3N}{2} = 1212$ и $N = 808$.

Замечание. Существуют и другие примеры.

Комментарий. Любой верный пример — 7 баллов.

M9.2 Верно ли, что при любых a и b хотя бы одно из уравнений $x^2-2ax+ab=0$ и $x^2-2bx+ab=0$ имеет решение?

Ответ. Верно.

Решение. Пусть оба уравнения не имеют решений. Это означает, что их дискриминанты отрицательны. Записав их, получим: $4(a^2-ab)<0$ и $4(b^2-ab)<0$. Сложив эти неравенства, получаем, что $4(a-b)^2<0$ — противоречие.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.
В процессе решения происходит деление на a или b без учета знаков этих чисел — 0 баллов.

M9.3 Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 1000 по кругу так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел была простым числом?

Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что числа получилось расставить требуемым образом. Заметим, что сумма любых трех чисел от 1 до 1000 больше 2, поэтому если какая-то сумма трех чисел равна простому числу, то это простое число нечетное. Пусть по кругу подряд стоят числа a, b, c, d. Тогда числа $a+b+c$ и $b+c+d$ — простые нечетные. Но тогда их разность, равная $a-d$, будет четной как разность двух нечетных чисел. Отсюда следует, что числа a и d имеют одинаковую четность. Таким образом, любые два числа, стоящие через два, имеют одинаковую четность.
Занумеруем числа по кругу. Тогда числа с номерами $1, 4, 7, \ldots, 1000$ будут иметь одинаковую четность. Но число с номером 3 должно иметь такую же четность, что и число с номером 1000. Аналогично, такую же четность будут иметь числа с номерами $6, 9, 12, \ldots, 999, 2, 5, \ldots, 998$. Таким образом, все числа получились одной четности. Противоречие.

Второе решение. Как и в первом решении, предположим, что числа получилось расставить требуемым образом, и заметим, что сумма любых трех чисел, стоящих подряд, нечетна. Возьмем в круге любое число N, а остальные 999 чисел разобьем на 333 группы по 3 подряд идущих числа. Тогда сумма этих 999 чисел равна нечетному числу как сумма 333 нечетных чисел. С другой стороны, сумма всех чисел от 1 до 1000 четна, так что и число N также нечетно. Однако в качестве N мы могли выбрать любое из чисел от 1 до 1000. Противоречие.

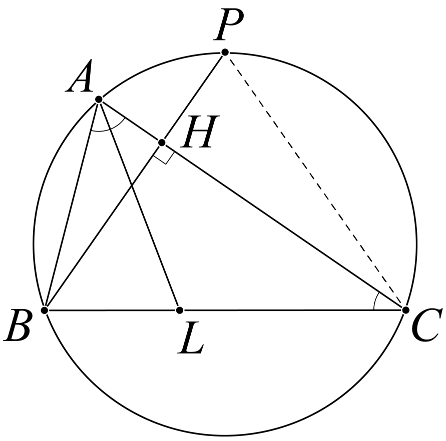
Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.
Доказано, что числа, идущие через два, имеют одинаковую четность — 3 балла.

M9.4 Действительные числа a и b удовлетворяют неравенствам $a \geq 1$, $b \geq 1$, $a+b \leq 2d$. Докажите, что $\sqrt{(a-1)(b+1)} + \sqrt{(b-1)(a+1)} < \sqrt{4d^2-2}$.

Решение. Возведя доказываемое неравенство в квадрат и приведя подобные члены, получаем: $2ab-2+2\sqrt{(a^2-1)(b^2-1)} < 4d^2-2$. Подкоренное выражение меньше $a^2 \cdot b^2$, поэтому нам достаточно проверить, что $4ab \leq 4d^2$. Последнее верно в силу неравенства $4ab \leq (a+b)^2$.

Комментарий. Задача сведена к доказательству неравенства $4ab \leq 4d^2$ — 4 балла.

М9.5 Пусть AL — биссектриса остроугольного треугольника ABC, а ω — описанная около него окружность. Обозначим через P точку пересечения продолжения высоты BH треугольника ABC с окружностью ω. Докажите, что если $\angle BLA = \angle BAC$, то $BP = CP$.



Решение. Обозначим $\alpha = \angle BAL$. Тогда $\angle CAL = \alpha$, и, по условию, $\angle BLA = 2\alpha$. Так как $\angle BLA$ — внешний в треугольнике ALC, получаем $\angle ACL = \angle BLA - \angle CAL = \alpha$ (см. рис.).
Из прямоугольного треугольника BHC теперь получаем $\angle CBH = 90^\circ - \alpha$. Так как точка P лежит на ω, имеем $\angle BPC = \angle BAC = 2\alpha$. Значит, $\angle PCB = 180^\circ - \angle CBP - \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - 2\alpha = 90^\circ - \alpha = \angle CBP$. Отсюда и следует, что треугольник PBC равнобедренный, $BP = CP$.

Комментарий. Доказано, что треугольник ALC равнобедренный — 3 балла.

(из варианта исключается одна из задач 10.2, 10.3)

M10.1 Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии с ненулевой разностью образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Найдите ее знаменатель.

Ответ. -2.

Решение. Пусть второй член арифметической прогрессии равен x, а разность прогрессии равна $d \neq 0$. Тогда геометрическую прогрессию образуют числа x, $x-d$, $x+d$. Из характеристического свойства геометрической прогрессии получаем $(x-d)^2 = x(x+d)$, откуда $d = 3x$. Значит, знаменатель прогрессии равен $\dfrac{x-d}{x} = \dfrac{x-3x}{x} = -2$.

Комментарий. Найдено отношение $\dfrac{x}{d}$ (или аналогичное) — 3 балла.

M10.2 Пусть сумма чисел a, b, c положительна. Докажите, что уравнение $a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$ имеет хотя бы один действительный корень.

Решение. Посчитав дискриминант этого квадратного уравнения, получим, что

$$D = 2\left((ab-ac)^2 + (ab-bc)^2 + (ac-bc)^2\right) \geq 0.$$

Комментарий. Дискриминант вычислен, но не преобразован к сумме квадратов — 1 балл.
Замечание. Другое решение можно получить, рассмотрев значения трёхчлена в точках a, b, c.

M10.3 Натуральное число n таково, что $(n+1)!+(n+1)$ делится на $n!+n$. Какие значения может принимать n?

Ответ. $n = 1$.

Решение. Так как $n!+n = n\left((n-1)!+1\right)$, то $(n+1)!+(n+1)$ делится на n. Заметим, что $(n+1)!+(n+1) = (n+1)(n!+1)$. Если $n > 1$, то и $n+1$, и $n!+1$ имеют остаток 1 при делении на n. Значит, произведение $(n+1)(n!+1)$ также имеет остаток 1 при делении на n, и поэтому на n не делится. Осталось заметить, что при $n = 1$ число $(1+1)!+(1+1) = 4$ делится на $1!+1 = 2$.
Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

M10.4 Пусть $A = \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\ldots}}} + \sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}$ (в каждом слагаемом 2019 корней). Что больше: A или 9?

Ответ. $A < 9$.

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{12+\ldots+\sqrt{12+\sqrt{12}}} < \sqrt{12+\ldots+\sqrt{12+\sqrt{16}}} = \sqrt{12+\ldots+\sqrt{12+4}} = 4.$$

Аналогично, $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}} < 5$. Поэтому $A < 9$.
Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

M10.5 Внутри окружности расположен пятиугольник $ABCDE$, у которого все стороны одинаковы. Каждая сторона пятиугольника продолжена до пересечения с окружностью. Продолжения лучей AB, BC, CD, DE, EA окрашены в синий цвет, остальных лучей — в красный цвет. Докажите, что сумма длин всех красных отрезков равна сумме длин всех синих отрезков.

Решение. Обозначим длины синих отрезков x_A, x_B, x_C, x_D, x_E, длины красных отрезков — y_A, y_B, y_C, y_D, y_E, а длину стороны пятиугольника — z. Для каждой из точек A, B, C, D, E запишем теорему о длинах частей хорд, которые пересекаются в этих точках. Получим равенства: $x_A(z+ + y_E) = y_A(z + x_B)$, $x_B(z + y_A) = y_B(z + x_C)$, $x_C(z + y_B) = y_C(z + x_D)$, $x_D(z + +y_C) = y_D(z + x_E)$, $x_E(z + y_D) = y_E(z + x_A)$. Сложив полученные равенства, после приведения подобных членов получим требуемое.

Комментарий. Для одной из вершин пятиугольника верно записана теорема о пересекающихся хордах — 2 балла.

(из варианта исключается одна из задач 11.2, 11.4)

M11.1 Ненулевые числа a, b и c таковы, что числа $a(b-c)$, $b(c-a)$ и $c(a-b)$, записанные в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что тогда и числа $a(b^{2109}-c^{2109})$, $b(c^{2109}-a^{2109})$ и $c(a^{2109}-b^{2109})$ также образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Числа образуют арифметическую прогрессию, поэтому $2b(c-a)=a(b-c)+c(a-b)$, откуда $3b(c-a)=0$. Поскольку $b\neq 0$, получаем $c-a=0$. Подставив в выражения $a(b^{2109}-c^{2109})$, $b(c^{2109}-a^{2109})$, $c(a^{2109}-b^{2109})$ число a вместо c, получаем тройку $a(b^{2109}-a^{2109})$, 0, $a(a^{2109}-b^{2109})$. Сумма крайних чисел равна нулю, то есть удвоенному среднему числу. Значит, они образуют арифметическую прогрессию.

Комментарий. Доказано, что $a=c$ — 4 балла.

M11.2 Известно, что трехчлен x^2+ax+b с положительными коэффициентами имеет два корня. Докажите, что для любого натурального n можно один из коэффициентов трехчлена увеличить на n, какой-то другой на $n+1$, а третий оставить без изменения так, что получившийся трехчлен тоже будет иметь два корня.

Решение. Так как трёхчлен x^2+ax+b имеет два корня, его дискриминант $D_1=a^2-4b>0$. Покажем, что трёхчлен $x^2+(a+n+1)x+(b+n)$ будет иметь два корня. Его дискриминант $D_2=(a+n+1)^2-4(b+n)=a^2+2a(n+1)+(n+1)^2-4b-4n=(a^2-4b)+2a(n+1)+(n-1)^2>0$ как сумма положительных чисел, что и требовалось.

Комментарий. Верно указано, какие коэффициенты и на сколько нужно увеличивать — 2 балла.

M11.3 Существуют ли различные простые числа m, n такие, что $m!+m$ делится на $n!+n$?

Ответ. Не существуют.

Решение. Предположим, что такие числа существуют. Тогда $m\geq n+1$. Так как $n!+n=n\left((n-1)!+1\right)$, то $m!+m$ делится на n. Так как $m!+m=m\left((m-1)!+1\right)$, а число n простое, то либо m, либо $(m-1)!+1$ делится на n. Но m, n — различные простые числа, поэтому m не делится на n. А $m-1\geq n$, поэтому $(m-1)!$ делится на n, и $(m-1)!+1$ имеет остаток 1 при делении на n. Значит, произведение $m\left((m-1)!+1\right)$ на n не делится.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

M11.4 Пусть $A=\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots}}}+\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots}}}+\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots}}}$ (в каждом слагаемом 2019 корней). Что больше: A или 18?

Ответ. $A<18$.

Решение. Заметим, что

$$\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20+\sqrt{20}}}<\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20+\sqrt{25}}}=\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20+5}}=5.$$

Аналогично, $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\ldots}}}<6$ и $\sqrt{42+\sqrt{42+\sqrt{42+\ldots}}}<7$. Поэтому $A<18$.

Комментарий. Только ответ без обоснования — 0 баллов.

M11.5 В треугольной пирамиде $SABC$ на ребре SB выбраны точки M, N, а на ребре SC — точки K, L. Оказалось, что точки A, M, N, K, L лежат на одной сфере, а объемы пирамид $ASKN$ и $ASML$ равны. Докажите, что $KL=MN$.

Решение. Так как объемы пирамид $ASKN$ и $ASML$ равны, а высота из вершины A у них общая, то равны площади треугольников SKN и SML. Отсюда $SK\cdot SN=SM\cdot SL$. Это означает, что треугольники SKM и SLN с общим углом подобны. Значит, четырехугольник $KLNM$ — трапеция. При этом трапеция вписана в окружность, являющуюся пересечением сферы с плоскостью SBC. Значит, ее боковые стороны KL и MN равны.

Комментарий. Доказано, что треугольники SKM и SLN подобны — 4 балла.
Замечено, что точки M, N, K, L лежат на одной окружности — 1 балл.

Межвузовский центр воспитания и развития талантливой молодежи в области естественно-математических наук «Физтех-Центр»

Сборник подготовили:

Солоднев С. А., Останин П. А., Гаврилов Ю. А., Диких, Д. А., Зарубин И. Е., Поминов С. С., Щербина Е. Н, Мукин Т. В., Шомполов И. Г., Трушин В. Б., Черкасова Е. К., Сидорова И. Е., Подлипский О. К., Агаханов Н. Х., Усков В. В., Плис В. И., Чивилёв В. И., Шеронов А. А., Юрьев Ю. В.

Под общей редакцией Шомполова И. Г.

Компьютерный набор Останин П. А.