Вариант 1

1. Найдите значение выражения

$$2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{y^2\left(xy^{-1}+1\right)^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1-yx^{-1}}{1+yx^{-1}}},$$

если известно, что $x=\frac{26}{17}$ и $y=\frac{10}{17}$.
Ответ: 2.
Решение. Упрощая выражение, получаем

$$2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{(x+y)^2}\cdot\frac{1+yx^{-1}}{2}=2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}}{(x+y)^2}\cdot\frac{x+y}{2x}=$$
$$=2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x+y}=\backslash x+y>0\backslash=2\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=3\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}.$$

Подставляя значения x и y, находим $3\sqrt{\frac{16/17}{36/17}}=3\sqrt{\frac{4}{9}}=2.$

2. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой BC биссектриса BL и медиана AM перпендикулярны. Найдите $\sin(1111\angle ACB)$.
Ответ: $-0{,}5$.
Решение. Пусть T – точка пересечения BL и медиана AM. В треугольнике ABM отрезок BT является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник ABM – равнобедренный ($AB=BM$). По свойству медианы, проведенной к гипотенузе, $AM=BM=MC$. Значит, $AB=BM=AM$, то есть треугольник ABM – равносторонний. Поэтому $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, $\angle ACB=\frac{\pi}{6}$. Тогда $\sin(1111\angle ACB)=\sin\frac{1111\pi}{6}=-0{,}5$.

3. Решите систему уравнений $\begin{cases}(x+y)(xy+1)=19,\\(x+3)(y+3)=-14.\end{cases}$ В ответе укажите наибольшее возможное значение выражения $6x+y$. Если у системы нет действительных решений запишите вместо этого 2024.
Ответ: 19.
Решение. Левая часть второго уравнения может быть записана в виде $xy+3(x+y)+9$. Вводя замену $x+y=u$, $xy=v$, получаем

$$\begin{cases}u(v+1)=19,\\3u+v+23=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\left[\begin{array}{l}u=-1, v=-20,\\u=-\frac{19}{3}, v=-4.\end{array}\right.$$

Если $u=-1$, $v=-20$, то есть два решения: $(-5;4)$ и $(4;-5)$. Если $u=-\frac{19}{3}$, $v=-4$, то есть ещё два решения: $\left(\frac{-19-\sqrt{505}}{6};\frac{-19+\sqrt{505}}{6}\right)$ и $\left(\frac{-19+\sqrt{505}}{6};\frac{-19-\sqrt{505}}{6}\right)$.
Значение выражения $6x+y$ для каждого из решений равно -26, 19, $\frac{-133-5\sqrt{505}}{6}$, $\frac{-133+5\sqrt{505}}{6}$ соответственно. Наибольшее из них — это 19.

4. Сколько целых значений x таких, что $|x|<100$, удовлетворяет неравенству

$$3\log_{27}(4x^2+1)\geq\log_3(3x^2+4x+1)?$$

Ответ: 195.
Решение. Неравенство равносильно неравенству $\log_3\left(4x^2+1\right)\geq\log_3\left(3x^2+4x+1\right)$, которое равносильно двойному неравенству $4x^2+1\geq3x^2+4x+1>0$. Его решение есть $x\in(-\infty;-1)\cup(-1/3;0]\cup[4;+\infty)$. Условию $|x|<100$ удовлетворяют 195 из них.

5. Три велосипедиста едут по шоссе в одном и том же направлении, притом скорость каждого из них постоянна. В тот момент, когда первые два велосипедиста находились в одной точке, третий отставал от них на 6 км. В тот момент, когда третий велосипедист догнал второго, первый был на 3 км позади них. На сколько километров второй велосипедист был впереди первого в тот момент времени, когда первый и третий были в одной точке?
Ответ: 2.
Решение. Пусть скорости велосипедистов равны v_1, v_2, v_3. Из условия следует, что $v_1 < v_2 < v_3$. Третий едет на $v_3 - v_2$ быстрее второго, поэтому ему нужно время $\frac{6}{v_3-v_2}$, чтобы догнать второго. За это время второй обгоняет первого на $\frac{6}{v_3-v_2} \cdot (v_2 - v_1)$, что по условию равно 3. Отсюда находим, что $v_3 = 3v_2 - 2v_1$.
Третий догоняет первого спустя время $\frac{6}{v_3-v_1}$. За это время второй успевает отдалиться от первого на $\frac{6}{v_3-v_1} \cdot (v_2 - v_1) = \frac{6(v_2-v_1)}{3v_2-2v_1-v_1} = 2$. Значит, второй велосипедист на 2 км впереди в момент встречи третьего и первого.

6. При скольких целых значениях параметра a неравенство $ax^2 + 4ax + 25 \leqslant 0$ не имеет решений?
Ответ: 7.
Решение. Если $a = 0$, то решений нет. Если $a > 0$, то решений нет, если дискриминант отрицательный. Тогда $\frac{D}{4} = 4a^2 - 25a < 0$, откуда $0 < a < \frac{25}{4}$. Если $a < 0$, то решения обязательно найдутся. Объединив все случаи получаем, что $0 \leqslant a < \frac{25}{4}$. Данное множество содержит 7 целочисленных значений.

7. Решите уравнение
$$\sin^2 2x + \sin^2 4x = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x}.$$
В ответе укажите количество его корней, удовлетворяющих неравенству $-2\pi \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2}$.
Ответ: 23.
Решение. Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений
$$\frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 8x}{2} = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$
$$\frac{\cos 4x + \cos 8x}{2} = \frac{\cos 2x}{\cos 3x}, \quad \cos 6x \cos 2x = \frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$
а при выполнении условия $\cos 3x \neq 0$ равносильно уравнению
$$\cos 2x(\cos 3x \cdot \cos 6x - 1) = 0.$$
Отсюда получаем
$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \frac{\cos 3x + \cos 9x}{2} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \cos 3x = \cos 9x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \cos 3x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$
Несложно проверить, что для всех полученных значений x условие $\cos 3x \neq 0$ выполняется.
Чтобы найти количество корней уравнения, сначала убедимся, что найденные серии корней не пересекаются:
$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} = \frac{2\pi n}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2} + 3k = 4n,$$
что невозможно, так как в левой части дробное число, а в правой — целое. Далее получаем:
$$-2\pi \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \leqslant \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{9}{2} \leqslant k \leqslant \frac{17}{2} \Leftrightarrow -4 \leqslant k \leqslant 8 \Rightarrow 13 \text{ корней};$$
$$-2\pi \leqslant \frac{2\pi k}{3} \leqslant \frac{9\pi}{2} \Leftrightarrow -3 \leqslant k \leqslant \frac{27}{4} \Leftrightarrow -3 \leqslant k \leqslant 6 \Rightarrow 10 \text{ корней}.$$
Итак, на данном отрезке у уравнения 23 корня.

8. Пусть G – середина гипотенузы PR прямоугольного треугольника PQR. Прямая ℓ проходит через точку G и пересекает сторону QR в точке A, а продолжение стороны PQ за точку P – в точке B. Найти площадь треугольника PQR, если $AR = 10$, $BP = 20$, $\angle RPQ = \arccos\frac{3}{5}$.

Ответ: 384.

Решение. Выберем на стороне PR точку C так, что $AC \parallel PQ$; тогда $CR = \frac{25}{2}$, $AC = \frac{15}{2}$. Пусть $GP = GR = x$; из подобия треугольников ACG и BPG следует, что $CG : PG = AC : PB$, т.е. $(x - \frac{5}{4}) : x = \frac{3}{4} : 2$, откуда $x = 20$. Следовательно, $PR = 40$, $S = \frac{1}{2} PQ \cdot QR = \frac{1}{2} PR^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 384$, так как $\sin\alpha = \frac{AC}{CR} = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Вариант 2.

1. Найдите значение выражения
$$\left[1-\left(\frac{a^{-0.75}+1}{a^{-0.25}+1}+\frac{3}{a^{0.25}}\right):\left(a^{-0.25}+1\right)\right]:a^{-0.75},$$
если известно, что $a=289$.
Ответ: -17.
Решение. Если обозначить $a^{-0.25}=t$, выражение принимает вид
$$\left[1-\left(\frac{t^3+1}{t+1}+3t\right):(t+1)\right]:t^3=\left[1-\left(t^2+2t+1\right):(t+1)\right]:t^3=[1-(t+1)]:t^3=-\frac{1}{t^2}.$$
Возвращаясь обратно к переменной a, получаем $-\sqrt{a}$. Так как $a=289$, окончательный результат — это -17.

2. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. При этом $AB=2CH$ и $CB=2AH$. Найдите $\cos(2024\angle ABC)$.
Ответ: $-0{,}5$.
Решение. Пусть $AB=2CH=2x$ и $CB=2AH=2y$. По теореме Пифагора $BH^2=AB^2-AH^2=BC^2-CH^2=(2x)^2-y^2=(2y)^2-x^2$. Отсюда $x=y$, и треугольник ABC — равносторонний. Тогда $\cos(2024\angle ABC)=\cos\frac{2024\pi}{3}=-0{,}5$.

3. Два стрелка сделали по 60 выстрелов каждый, причём в сумме у них было 99 промахов и 21 попадание. Известно, что у первого стрелка на один промах приходилось t попаданий, а у второго на один промах — $3t$ попаданий (значение t не задано). Сколько попаданий было у второго стрелка?
Ответ: 15.
Решение. Пусть у первого стрелка было x промахов. Тогда у второго стрелка $(99-x)$ промахов. Количество попаданий равно tx у первого и $3t(99-x)$ у второго. Так как каждый сделал по 60 выстрелов, получаем систему уравнений $x+tx=60$, $99-x+3t(99-x)=60$, решая которую, находим, что $t=\frac{1}{9}$, $x=54$. Отсюда количество попаданий второго стрелка равно $3t(99-x)=15$.

4. Сумма цифр трёхзначного числа равна 15. Сумма квадратов цифр этого числа равна 93. Если из данного числа вычесть число, составленное из тех же цифр, записанных в обратном порядке, получится 297. Найдите наименьшее возможное исходное число.
Ответ: 582.
Решение. Пусть $\overline{abc}$ — данное трёхзначное число. Тогда из условия следует, что
$$\begin{cases}a+b+c=15,\\(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=297,\\a^2+b^2+c^2=93.\end{cases}$$
Эта система имеет два решения: $a=8$, $b=2$, $c=5$ и $a=5$, $b=8$, $c=2$. Им соответствуют числа 825 и 582. Наименьшим из них является 582.

5. Решите уравнение $\sqrt{24-12x}+2\sqrt{11-8x}=5$. Если у уравнения один корень, запишите его в ответ. Если у него несколько корней, запишите их сумму. Если корней нет, запишите 2024.
Ответ: 1,25.
Решение. Область допустимых значений уравнения — это $x\leq\frac{11}{8}$. На области допустимых значений уравнение может быть преобразовано следующим образом:
$$2\sqrt{11-8x}=5-\sqrt{24-12x}\Rightarrow 44-32x=25+24-12x-10\sqrt{24-12x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{24-12x}=1+4x\Rightarrow 96-48x=16x^2+8x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1{,}25,\\x=-4{,}75.\end{array}\right.$$

Оба значения x принадлежат области определения, но при подстановке их в исходное уравнение можно убедиться, что только $x = 1{,}25$ удовлетворяет уравнению.

6. Найдите сумму S всех корней уравнения
$$\frac{\cos^3 x\ \sin 3x}{\sin x} + \sin^2 x\ \cos 3x = 6\ \cos 2x\ \cos^2 x,$$
удовлетворяющих неравенству $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$. В ответе укажите значение $\frac{S}{\pi}$.
Ответ: 14.
Решение. Левая часть уравнения может быть преобразована следующим образом:
$$\begin{aligned}\frac{\cos^3 x\ \sin 3x}{\sin x} + \sin^2 x\ \cos 3x &= \frac{\cos^3 x\left(3\sin x - 4\sin^3 x\right)}{\sin x} + \sin^2 x\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = \\ &= \cos^3 x\left(3 - 4\sin^2 x\right) + \left(1 - \cos^2 x\right)\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = \\ &= \cos^3 x\left(4\cos^2 x - 1\right) + \left(1 - \cos^2 x\right)\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) = \\ &= 6\cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x\left(2\cos^2 x - 1\right) = 3\cos x\cos 2x.\end{aligned}$$
Значит, при условии, что $\sin x \neq 0$, уравнение равносильно следующему:
$$3\cos x\cos 2x = 6\cos 2x\cos^2 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = 0,\\ \cos x = 0,\\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\\ x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$
Очевидно, все найденные корни удовлетворяют ограничению $\sin x \neq 0$.
Значение S равно
$$-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{3} + \frac{7\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} + \frac{7\pi}{3} + \frac{5\pi}{2} = 14\pi.$$
Поэтому $\frac{S}{\pi} = 14$.

7. При скольких целых значениях параметра a уравнение $(a^2 - 9)x^2 + 5 = 2\sqrt{a+3}\cdot x$ имеет хотя бы одно вещественное решение?
Ответ: 6.
Решение. Перенося все члены влево, получаем уравнение $(a^2 - 9)x^2 - 2\sqrt{a+3}\cdot x + 5 = 0$. Для того чтобы корень был определён, необходимо выполнение неравенства $a \geqslant -3$.

- При $a = 3$ получаем уравнение $-2\sqrt{6}x + 5 = 0$, которое имеет решение.
- При $a = -3$ уравнение не имеет решений.
- Если же $a \neq \pm 3$, то уравнение является квадратным. Для того чтобы оно имело хотя бы один вещественный корень, нужно, чтобы его дискриминант был неотрицательным. Запишем это условие в виде $\frac{D}{4} \ge 0 \Leftrightarrow a + 3 - 5(a^2 - 9) \ge 0$. Отсюда $a \in \left[-3; \frac{16}{5}\right], a \neq \pm 3$.

Объединяя полученные решения, находим множество допустимых значений параметра: $a \in \left(-3; \frac{16}{5}\right]$. В этом множестве 6 целых значений параметра.

8. В угол с вершиной C вписана окружность ω, касающаяся сторон угла в точках A и B. На дуге окружности ω, лежащей вне треугольника ABC, расположена точка K. Расстояния от точки K до прямых AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найти расстояние от точки K до прямой AB.
Ответ: 78.
Решение. Пусть E, F и M — основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые BC, AC и AB соответственно. Так как $\angle KBE = \angle KAB$, то $\triangle KAM$ подобен $\triangle KBE$, откуда следует, что
$$\frac{KM}{KA} = \frac{KE}{KB}, \tag{1}$$

где $KE = 156$. Аналогично, из подобия треугольников KAF и KBM следует, что

$$\frac{KM}{KB} = \frac{KF}{KA}, \tag{2}$$

где $KF = 39$. Перемножая равенства (1) и (2), получаем

$$KM^2 = KE \cdot KF = 39 \cdot 156,$$

следовательно, $KM = 78$.

Вариант 3

1. Найдите сумму всех корней уравнения $\dfrac{3}{3+\sqrt{2x}} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{\sqrt{18x}+2x}$. Если корней нет, запишите в ответе 2024.
Ответ: 20,5.
Решение. Умножая обе части уравнения на $4\sqrt{2x}\left(3+\sqrt{2x}\right)$, получаем $12\sqrt{2x}-20 = 3\sqrt{2x}+2x$, $2x - 9\sqrt{2x} + 20 = 0$. Решая это уравнение как квадратное относительно $\sqrt{2x}$, находим, что $\sqrt{2x} = 5$ или $\sqrt{2x} = 4$, поэтому $x = 12{,}5$ или $x = 8$. Оба корня входят в область допустимых значений, а их сумма равна 20,5.

2. Сколько целых значений x удовлетворяет неравенству
$$1 + \log_7(x+10) \leq \log_7(100 - x^2)?$$
Если их бесконечно много, запишите в ответе 20,24.
Ответ: 13.
Решение. Неравенство равносильно неравенству $\log_7(7(x+10)) \leq \log_7(100-x^2)$, которое равносильно двойному неравенству $0 < 7(x+10) \leq 100-x^2$. Его множество решений есть $x \in (-10;3]$. Оно содержит 13 целых чисел.

3. Из точки N на стороне BC равностороннего треугольника ABC опущен перпендикуляр NP на сторону AB. Окружность ω, описанная около треугольника BNP, касается прямой AN. Найдите радиус окружности ω, если периметр треугольника ABC равен 15.
Ответ: 1,25.
Решение. Треугольник BNP прямоугольный, поэтому его гипотенуза BN является диаметром описанной окружности ω. Так как окружность ω касается прямой AN, то диаметр BN перпендикулярен AN. Значит, AN — высота равностороннего треугольника ABC. Поэтому N — середина стороны BC. Откуда $BN = \frac{BC}{2} = \frac{15}{6} = 2{,}5$. Значит, искомый радиус равен 1,25.

4. Торнадо движется прямолинейно. В полдень центр торнадо находился в 24 км восточнее и в 5 км южнее администрации посёлка, а двадцать минут спустя — в 20 км восточнее и $\frac{10}{3}$ км южнее администрации посёлка. На каком наименьшем расстоянии от администрации посёлка пройдёт центр торнадо? Ответ выразите в метрах и округлите его до ближайшего целого числа.
Ответ: 4 615.
Решение. Введём систему координат с началом в администрации посёлка. Пусть ось абсцисс направлена на восток, а ось ординат — на север. Тогда два замера местоположения торнадо соответствуют точкам с координатами $(24;-5)$ и $\left(20;-\frac{10}{3}\right)$. Уравнение прямой, проходящей через эти точки, есть $5x+12y-60=0$. Расстояние от начала координат до этой прямой равно $\frac{|5\cdot 0+12\cdot 0-60|}{\sqrt{5^2+12^2}} = \frac{60}{13}$ км. Выражая это расстояние в метрах, имеем $\frac{60}{13}\cdot 1000 \approx 4\,615$ метров.

5. Даны две последовательности: арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ и геометрическая прогрессия $\{b_n\}$. Известно, что $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_4 = b_3$. Каково наибольшее возможное значение знаменателя прогрессии $\{b_n\}$, если известно, что разность прогрессии $\{a_n\}$ отлична от нуля?
Ответ: 2.
Решение. Если d — разность $\{a_n\}$, а q — знаменатель $\{b_n\}$, из условия получаем, что $a_1 = b_1$, $a_1 + d = b_1 q$, $a_1 + 3d = b_1 q^2$. Разделив второе уравнение на первое, а третье на второе, получаем
$$\frac{a_1+d}{a_1} = q, \qquad \frac{a_1+3d}{a_1+d} = q.$$
Приравнивая левые части и упрощая, получаем $d^2 = a_1 d$, откуда $a_1 = d$, так как $d \neq 0$. Следовательно, $q = \frac{d+d}{d} = 2$.

6. Решите уравнение
$$\left(\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x\right)^2=7+3\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right).$$
В ответе укажите сумму его корней на отрезке $12\pi\leqslant x\leqslant 30\pi$, делённую на π.
Ответ: 379,5.
Решение. Пусть $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=t$, тогда $\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=2t$ и уравнение принимает вид $4t^2-3t-7=0$, откуда $t_1=-1$, $t_2=\frac{7}{4}$. Следовательно, $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$, откуда $2x-\frac{\pi}{6}=\pi+2\pi n$, $x=\frac{7\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Чтобы корни лежали на отрезке $[12\pi;30\pi]$, должно выполняться неравенство $12\pi\leqslant\frac{7\pi}{12}+\pi n\leqslant 30\pi$, откуда $12\leqslant n\leqslant 29$. Значит, сумма этих корней равна
$$\left(\frac{7\pi}{12}+12\pi\right)+\left(\frac{7\pi}{12}+13\pi\right)+\ldots+\left(\frac{7\pi}{12}+29\pi\right)=379{,}5\pi.$$

7. При каком наибольшем значении параметра t система
$$\begin{cases}|x-2|+2|y|=4,\\ x^2+y^2=2x+t\end{cases}$$
имеет ровно три действительных решения $(x;y)$?
Ответ: 8.
Решение. Перепишем второе уравнение в виде $(x-1)^2+y^2=t+1$. График первого уравнения — ромб с вершинами $(-2;0)$, $(6;0)$, $(2;2)$, $(2;-2)$. График второго уравнения при $t>-1$ — окружность с центром $(1;0)$ и радиусом $\sqrt{t+1}$ (при $t=-1$ окружность вырождается в точку $(1;0)$, а при $t<-1$ уравнение задаёт пустое множество). Оба множества симметричны относительно оси Ox, поэтому три (нечётное) количество решений может быть только тогда, когда окружность пересекает ромб в вершине $(-2;0)$ или $(6;0)$. В первом случае $t=8$ и система имеет три решения, во втором случае $t=24$ и система имеет ровно одно решение.

8. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол ADC прямой. На отрезке BD выбрана точка S так, что $BS:SD=1:3$. Окружность ω с центром в точке S пересекает прямую BC в точках P и M и касается прямой AD. Найти длину AB, если известно, что $BC=9$, $AD=8$, $PM=4$.
Ответ: 3.
Решение. Пусть $CD=x$, B' и S' – проекции точек B и S на прямую AD, а S'' – проекция точки S на прямую BC. Тогда $SS'=SM=\frac{3}{4}x$, $SS''=\frac{1}{4}x$, $S''M=\sqrt{(SM)^2-(SS'')^2}=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $PM==2S''M=x\sqrt{2}=4$, откуда $x=2\sqrt{2}$. Поэтому
$$AB=\sqrt{(BB')^2+(B'A)^2}=\sqrt{(CD)^2+(BC-AD)^2}=3.$$

Вариант 4.

1. Пусть CD — высота прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB и $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$. Найдите сумму катетов треугольника ABC, если $BD + CD = 2\,024$.
Ответ: $4\,048$.
Решение. Треугольники ABC и CBD подобны с коэффициентом 2. Поэтому искомая сумма катетов равна $2\,024 \cdot 2 = 4\,048$.

2. При скольких целых значениях параметра a решением неравенства $x^2+(a-1)x+4 \geq 0$ является любое действительное число? Если их бесконечно много, напишите в ответе 20,24.
Ответ: 9.
Решение. Решением неравенства является любое действительное число, если дискриминант $D \leqslant 0$. Тогда $D = (a-1)^2 - 16 \leq 0$. Откуда $|a-1| \leq 4$. Данное неравенство имеет 9 целочисленных решений.

3. Сколько целых значений x таких, что $|x| < 10$, удовлетворяет неравенству
$$\log_2(x-2)^2 + 2\log_2(x+4) \geq 6?$$
Ответ: 9.
Решение. Неравенство равносильно неравенству $\log_2(|x-2|(x+4)) \geq 3$. Если $-4 < x < 2$, то $-(x-2)(x+4) \geq 8$, откуда $-2 \leq x \leq 0$. Если $x > 2$, то $(x-2)(x+4) \geq 8$, откуда $x \geq \sqrt{17} - 1$. Условию $|x| < 10$ удовлетворяют 9 решений.

4. Три велосипедиста едут по шоссе из пункта A в пункт B. Двое из них выезжают одновременно, причём первый едет со скоростью 15 км/ч, а второй — со скоростью 12 км/ч. Третий велосипедист выезжает спустя 45 минут, причём он догоняет первого на 52,5 минуты позже, чем второго. Чему равна скорость третьего велосипедиста? Выразите эту скорость в км/ч.
Ответ: 21.
Решение. Пусть скорость третьего велосипедиста равна x км/ч. За 45 минут второй велосипедист успевает проехать $\frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ км. Третий велосипедист едет со скоростью на $(x-12)$ км/ч большей, чем второй. Значит, чтобы сократить отставание от второго на 9 км, ему понадобится $\frac{9}{x-12}$ ч.
Рассуждая аналогично, получаем, что ему нужно $\frac{45}{4(x-15)}$ ч, чтобы догнать первого. По условию первое время меньше второго на 52,5 минут, т.е. на $\frac{7}{8}$ часа, откуда получаем уравнение
$$\frac{45}{4(x-15)} = \frac{9}{x-12} + \frac{7}{8}.$$
Его решениями являются $x = 21$ и $x = \frac{60}{7}$. Второй корень не удовлетворяет условию задачи, так как чтобы третий велосипедист смог догнать первых двух, его скорость должна быть больше, чем 15 км/ч.

5. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие обоим неравенствам $2x^2+2y^2+12y+65 < 20x$ и $x + 3y + 3 < 0$. В ответе запишите количество таких пар.
Ответ: 3.
Решение. Выделяя полные квадраты в левой части ервого неравенства, получаем $2(x-5)^2 + 2(y+3)^2 < 3$. Так как x и y целые, есть три варианта:

- $(x-5)^2 = (y+3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 5,\ y = -3,$
- $(x-5)^2 = 1,\ (y+3)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 6,\ y = -3, \\ x = 4,\ y = -3, \end{array}\right.$
- $(x-5)^2 = 0,\ (y+3)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 5,\ y = -2, \\ x = 5,\ y = -4. \end{array}\right.$

Остаётся проверить, какие из найденных пар чисел удовлетворяют второму неравенству. Это $(5; -3)$, $(4; -3)$, $(5; -4)$.

6. Решите уравнение
$$\frac{\operatorname{ctg} x \ \operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x} = \frac{\operatorname{ctg} 4x \ \operatorname{ctg} 3x}{\operatorname{ctg} 4x - \operatorname{ctg} 3x}.$$
В ответе укажите количество корней уравнения, удовлетворяющих условию $-3\pi \leqslant x \leqslant 10\pi$.
Ответ: 52.
Решение. Преобразуем знаменатели дробей левой и правой частей уравнения:
$$\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{\sin x}{\sin x \ \sin 2x} = -\frac{1}{\sin 2x}, \quad \sin x \neq 0;$$
$$\operatorname{ctg} 4x - \operatorname{ctg} 3x = \frac{\cos 4x}{\sin 4x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = -\frac{\sin x}{\sin 3x \ \sin 4x}.$$
ОДЗ уравнения определяется условиями
$$\sin x \ \sin 2x \ \sin 3x \ \sin 4x \neq 0. \tag{2}$$
На ОДЗ исходное уравнение равносильно каждому из уравнений
$$\frac{\cos x \ \cos 2x \ \sin 2x}{\sin x \ \sin 2x} = \frac{\cos 3x \ \cos 4x \ \sin 3x \ \sin 4x}{\sin 3x \ \sin 4x \ \sin x},$$
$$\cos x \ \cos 2x = \cos 3x \ \cos 4x, \quad \cos 3x + \cos x = \cos 7x + \cos x,$$
$$\cos 3x - \cos 7x = 0, \quad \sin 5x \ \sin 2x = 0.$$
Так как $\sin 2x \neq 0$, остаётся уравнение $\sin 5x = 0$, откуда $x = \pi n/5$, $n \in \mathbb{Z}$. Условие (2) выполнено, если $n \neq 5k$, $k \in \mathbb{Z}$. Остаётся найти количество корней, удовлетворяющих неравенству.
$$-3\pi \leqslant \frac{\pi n}{5} \leqslant 10\pi \quad \Leftrightarrow \quad -15 \leqslant n \leqslant 50 \quad \Rightarrow \quad 66 \text{ значений } n,$$
$$\text{из них 14 кратны 5} \quad \Rightarrow \quad 66 - 14 = 52 \ \text{ корня на данном отрезке.}$$

7. За месяц в магазине продали 21 тонну конфет трёх сортов. Известно, что конфеты первого сорта стоят 600 рублей за килограмм, второго — 400, третьего — 200. Массы проданных конфет составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а суммарно за конфеты было получено 6 600 000 рублей. Сколько килограммов конфет первого сорта было продано?
Ответ: 3 000.
Решение. Пусть продали x килограммов конфет первого сорта, xq — второго сорта и xq^2 — третьего. Из условия получаем, что $x + xq + xq^2 = 21\,000$ и $600x + 400xq + 200xq^2 = 6\,600\,000$. Разделив второе уравнение на первое, получаем $\frac{3+2q+q^2}{1+q+q^2} = \frac{11}{7}$, единственным положительным корнем которого является $q = 2$. Тогда $x = \frac{21\,000}{1+q+q^2} = 3\,000$. Это и есть ответ в задаче.

8. Пусть ω – описанная окружность треугольника PQR, а G и H — соответственно точки пересечения с ω продолжений медиан QA и PB треугольника PQR. Найдите радиус окружности ω, если $QA = AG$, $PH : PB = 3 : 2$, а площадь треугольника PQR равна 80.
Ответ: 10.
Решение. Так как хорды PR и QG в точке A пересечения делятся пополам, то $QRGP$ — параллелограмм, вписанный в окружность. Следовательно, он является прямоугольником. Таким образом, $\angle PQR = \frac{\pi}{2}$ и A — центр окружности ω. Пусть $BH = x$, тогда $BP = 2x$. По теореме о пересекающихся хордах окружности $BP \cdot BH = BQ \cdot BR$. Но $BR = BQ$, поэтому $BQ^2 = 2x^2$, $BQ = x\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника BPQ находим $PQ = \sqrt{BP^2 - BQ^2} = x\sqrt{2}$. Итак, катеты треугольника PQR равны $x\sqrt{2}$ и $2x\sqrt{2}$, а гипотенуза равна $x\sqrt{10}$. Площадь треугольника PQR равна $\left(x\sqrt{2}\right)^2 = 80$, $x = 2\sqrt{10}$. Диаметр ω равен длине гипотенузы, то есть 20. Значит, радиус ω равен 10.