Решения основного тура.

МАТЕМАТИКА

1. Упростите выражение

$$\frac{(a+b)^4-(a-b)^4}{(a^2+b^2)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}\cdot\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$$ **и найдите его значение при** $a=2,\quad b=3$**.**

Решение. Преобразуем выражение

$$\frac{\left((a+b)^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2+(a-b)^2\right)}{(a^2+b^2)\left(\frac{a+b}{ab}\right)}\cdot\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{(a+b-a+b)(a+b+a-b)(a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2)(a+b)}{(a^2+b^2)ab}=$$

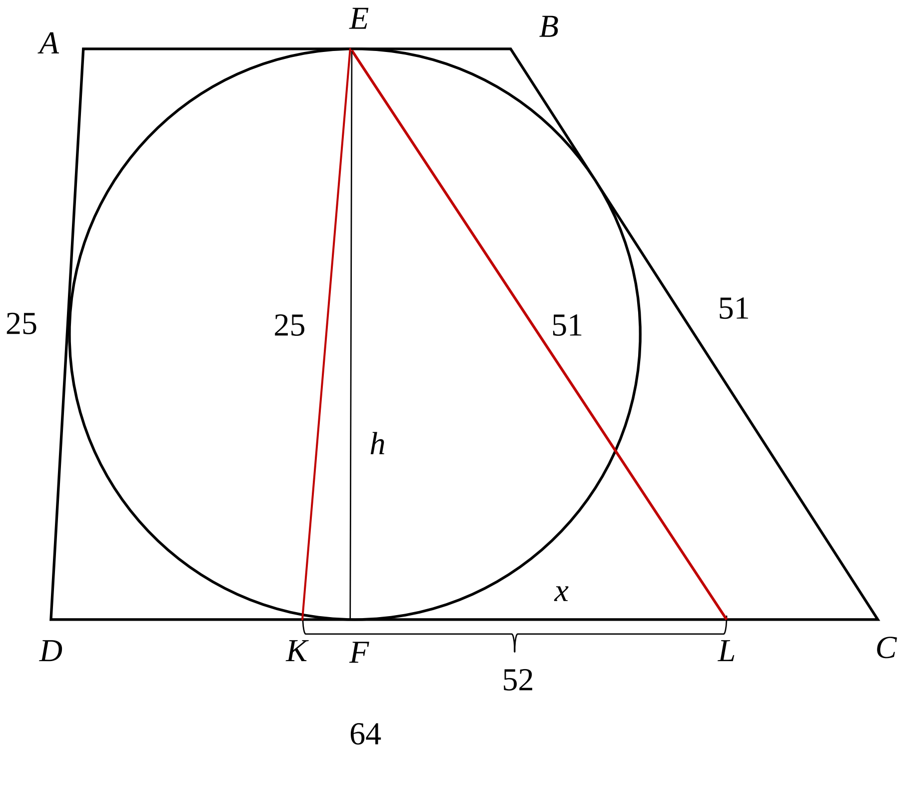
$$=\frac{2b\cdot 2a(2a^2+2b^2)(a+b)}{(a^2+b^2)ab}=8(a+b)$$

При $a=2,\quad b=3$, получаем **ответ 40.**

2. Найдите радиус окружности, вписанной в трапецию, у которой боковые стороны равны 25 и 51, а длина одного из оснований равна 64.

Решение. Поскольку трапеция описана около окружности, то по признаку описанного четырехугольника, у нее равны суммы противоположных сторон, т.е. второе основание равно 25 + 51 – 64 = 12.

Обозначим вершины трапеции через *A*, *B*, *C* и *D* как показано на рисунке. Пусть *E* и *F* – точки касания вписанной окружности с основаниями. Проведем через точку *E* прямые *EK* и *EL* параллельные *AD* и *BC* соответственно. Тогда *KL* = 64 – 12 = 52.



Обозначим в треугольнике EKL высоту за h, а FL за x и запишем два раза теорему Пифагора

$$h^2 + x^2 = 51^2,$$
$$h^2 + (52 - x)^2 = 25^2,$$

откуда находим $x = 45$ и $h = 24$. Высота треугольника EKL является диаметром окружности, значит радиус равен 12.

Ответ: 12.

3. В 500 кг руды содержится некоторое количество железа. После удаления из руды 200 кг примесей, содержащих 12,5 % железа, процент железа в руде повысился в 1,5 раза. Сколько кг железа было в руде после удаления указанных 200 кг примесей?

Решение. Пусть после удаления 200 кг примесей в руде стало x кг железа. Тогда процент железа равен $\frac{x}{300}100\%$. Вначале процент железа был равен $\frac{x + 0.125 \cdot 200}{500}100\%$. Тогда по условию задачи: $\frac{x + 0.125 \cdot 200}{500} \cdot \frac{3}{2} = \frac{x}{300}$. Откуда x=225.

Ответ. 225

4. **Два мастера, работая вместе, могли выполнить задание за 8 часов. Но, так как второй мастер приступил к работе на 3 часа позже, чем первый, то для выполнения задания им пришлось проработать 1 лишний час. За сколько часов мог бы выполнить все это задание первый мастер, работая отдельно?**

Решение. Пусть искомое время равно t. Тогда производительность первого мастера $\frac{1}{t}$, а второго мастера $\frac{1}{8} - \frac{1}{t}$. По условию $\frac{1}{t} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 6 = 1$, откуда t = 12.

Ответ: 12 ч

5. **Рассматриваются все пары натуральных чисел, произведение которых равно 2940, а наибольший общий делитель равен 7. Чему равна наименьшая сумма в такой паре?**

Решение. Поскольку оба числа делятся на 7, можем обозначить их как $7k$ и $7p$; при этом числа k и p должны быть взаимно просты (иначе наибольший общий делитель окажется больше 7). По условию $7k \cdot 7p = 2940$, откуда $kp = 60$. Раскладываем правую часть на множители:

$$kp = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Учитывая, что числа k и p не могут содержать одинаковых множителей, получим следующие возможности:

$$k = 1,\ p = 60;$$
$$k = 4,\ p = 15;$$
$$k = 3,\ p = 20;$$
$$k = 5,\ p = 12.$$

Можно также поменять значения k и p местами, но это не даст новых пар чисел.
Умножая k и p на 7, получим ответ: 7 и 420; 28 и 105; 21 и 140; 35 и 84. Наименьшая сумма равна 119

Ответ. 119

ФИЗИКА

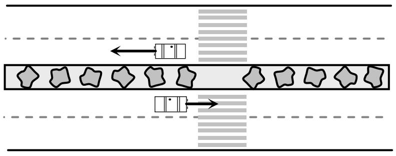


Рис. 1

1. По встречным полосам дороги навстречу друг другу движутся два автомобиля с разными, но постоянными скоростями. В некоторый момент времени расстояние между ними оказалось минимально возможным и равным $l = 5$ м (рис. 1). Ещё через секунду оно стало равным $2l$. Каким будет расстояние между автомобилями еще через секунду? Машины считать точечными. Ответ выразите в метрах и ввести в поле ответа.

Ответ: 18,0 м.

Решение. Пусть скорости автомобилей равны υ_1 и υ_2. Тогда расстояние между ними через время $\Delta t = 1$ с после положения, показанного на рисунке, составит $2l = \sqrt{l^2 + (\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 (\Delta t)^2}$.

Из этого соотношения получаем
$$(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 (\Delta t)^2 = 3l^2 \qquad (*)$$

Расстояние между автомобилями еще через $\Delta t = 1$ с найдем аналогично $x = \sqrt{l^2 + 4(\upsilon_1 + \upsilon_2)^2 (\Delta t)^2}$.

Откуда с учетом (*) находим $x = \sqrt{l^2 + 12l^2} = \sqrt{13}l = 18,0$ м

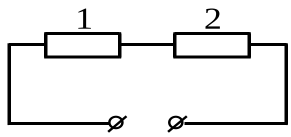


Рис. 2

2. Два электронных прибора номинальной мощностью $P_1 = 40$ Вт и $P_2 = 60$ Вт, рассчитанные на подключение к бытовой электрической сети, соединили последовательно и включили в сеть (рис. 2).

Найдите отношение мощностей P_1' и P_2', которые выделяются на этих приборах при таком соединении (P_1' - мощность, которую выделяет прибор с номинальной мощностью P_1, и P_2' - мощность, которую выделяет прибор с номинальной мощностью P_2). Отношение P_1' / P_2' введите в поле ответа. Считайте, что сопротивление приборов не зависит от температуры.

Ответ: 1,5

Решение. Сопротивления приборов найдем из условия, что при приложении к каждому из них напряжения U сети на них выделится номинальная мощность:
$$r_1 = \frac{U^2}{P_1}, \qquad r_2 = \frac{U^2}{P_2}$$

При последовательном соединении приборов сила тока I, протекающего через них, будет одинаковый. При этом отношение мощностей, выделяющихся на приборах, будет равно отношению их сопротивлений
$$\frac{P_1'}{P_2'} = \frac{I^2 r_1}{I^2 r_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{P_2}{P_1} = 1,5$$

3. В электрический чайник налили некоторое количество воды с температурой $t_0 = 20°C$ и включили в электрическую сеть. Вода закипела через время $T = 3{,}0$ мин после включения. Сколько времени вода будет кипеть до её полного испарения (выкипания)? Удельная теплоемкость воды $c_В = 4{,}20 \cdot 10^3$ ДЖ/(кг·град), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}24 \cdot 10^6$ Дж/кг. Считайте, что мощность нагревателя чайника постоянна, а вся теплота, выделившаяся в нагревателе, расходовалась на нагрев или парообразование воды. Испарением воды в процессе нагревания чайника пренебречь.
Время выкипания воды выразите в минутах и введите в поле ответа.

Ответ: 20,0 мин
Решение. Для времени T нагревания воды до $100°$ С и времени ее выкипания T_1 имеем

$$PT = cm\left(t - t_0\right); \qquad PT_1 = rm,$$

где P - мощность нагревателя чайника, c - удельная теплоемкость воды, m - ее масса, $t = 100°C$ – температура кипения воды. Деля уравнения друг на друга, получим

$$T_1 = \frac{rT}{c\left(t - t_0\right)} = 20{,}0 \text{ мин}$$

4. Из 29 одинаковых невесомых стержней длиной l изготовили кронштейн (рис. 3). Кронштейн прикрепили к вертикальной стене с помощью шарнира и горизонтально расположенного стержня длиной $l/2$, прикрепленного к стене и кронштейну (отмечен на рис. 3 стрелкой). К концу кронштейна с помощью длинной невесомой нити подвесили груз массой $m = 10$ кг.

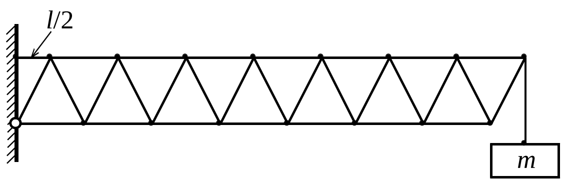
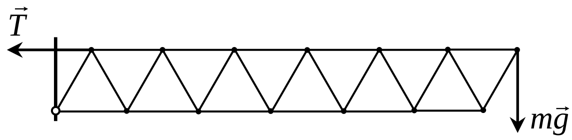


Рис. 3

Найдите силу натяжения стержня длиной $l/2$, с помощью которого кронштейн крепится к стене. Считайте $g = 10$ м/с^2.
Силу натяжения стержня выразите в ньютонах и введите в поле ответа.

Ответ: 866 Н.
Решение. В равновесии на кронштейн действуют следующие внешние силы: искомая сила натяжения стержня $\vec{T}$, сила натяжения нити, равная силе тяжести груза $m\vec{g}$ и сила реакции шарнира (на рисунке не показана). Равенство нулю суммы моментов всех сил, действующих на кронштейн, относительно шарнира дает



$$7{,}5mg = \frac{\sqrt{3}}{2}T, \qquad \text{или} \qquad T = 5\sqrt{3}mg = 866 \text{ Н}$$

5. На гладком горизонтальном столе находятся два груза массой $m = 1$ кг и $2m = 2$ кг, соединённые невесомой и нерастяжимой нитью, и два лёгких блока, один из которых (правый) закреплен, другой (левый) – нет. Нить переброшена через блоки (рис. 4). На ось подвижного блока начинает действовать постоянная внешняя сила $F = 10$ Н (рис. 4 - вид сверху). Найдите ускорение блока.
Ответ выразите в (м/с^2) и введите в поле ответа.

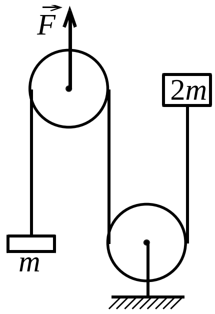


Рис. 4

Ответ: 3,75 м/с^2
Решение. Поскольку подвижный блок лёгкий, сила натяжения нити равна $F/2$. При этом ускорение груза массой $2m$ равно $F/4m$. Ускорение груза массой m - $F/2m$.

Найдем ускорение подвижного блока. Пусть, начиная с того момента, когда грузы покоились, прошел интервал времени Δt. Тогда справа освободился кусок веревки длиной

$$\Delta l_{пр} = \frac{F(\Delta t)^2}{8m}.$$

Левый груз переместился на

$$\Delta l_{лев} = \frac{F(\Delta t)^2}{4m}.$$

Тогда подвижный блок переместится на расстояние

$$\Delta l_{бл} = \frac{\Delta l_{пр} + \Delta l_{лев}}{2} = \frac{3F(\Delta t)^2}{16m}$$

и, следовательно, его ускорение

$$a_{бл} = \frac{2\Delta l_{бл}}{(\Delta t)^2} = \frac{3F}{8m} = 3,75 \text{ м/с}^2.$$

Problem A. Чемпионат по шашкам

Input file:	*стандартный ввод*
Output file:	*стандартный вывод*
Time limit:	1 секунда
Memory limit:	64 мебибайта

Так как после каждой партии выбывает один школьник, а изначально школьников N, то для того, чтобы определить победителя, надо провести $N - 1$ партий.

Пример кода на C++:

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
 int a;
 cin >> a;
 cout << a-1 << endl;
 return (0);
}
```

Problem B. Космические разведчики

Input file: *standard input*
Output file: *standard output*
Time limit: 1 секунда
Memory limit: 512 мебибайт

Посмотрев на первые два примера, можем предположить, что одинаковые буквы кодируются одинаковым набором цифр, разные — разным. Из слов “олово”, “лов” и “вол” выясняем коды букв ‘о’ (00), ‘л’ (01), ‘в’ (10). Сравнив коды слов “олово” и “слово”, видим, что букве ‘с’ соответствует код 110. Далее, рассмотрев слово “вес”, находим код буквы ‘е’, равный 1110.

После этого можно обратить внимание на тот факт, что начало загаданного слова совпадает со словом “вес”, нерасшифрованным остаётся код 0100, соответствующий буквам ‘л’ и ‘о’. Таким образом, загаданное слово — слово “весло”.

Problem C. Соревнование лесорубов

Input file:	*standard input*
Output file:	*standard output*
Time limit:	1 секунда
Memory limit:	512 мебибайт

Для решения задачи достаточно завести три переменные: имя, количество срубленных деревьев и количество ударов для лесоруба, показавшего лучший результат среди уже прочитанных.

Переменные инициализируются данными первого считанного лесоруба, затем в цикле считываются данные по последующим лесорубам и проверяется, верно ли, что только что считанный лесоруб срубил больше деревьев, чем лидер на данный момент, или же он срубил столько же деревьев, но за меньшее количество ударов. В этом случае сохраняются данные по текущему лесорубу, иначе переменные остаются без изменений.

В качестве ответа выводится сохранённое после считывания данных всех лесорубов имя.

Пример кода на C++:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main() {
        int n;
        cin >> n;
        string name_best;
        cin >> name_best;
        int trees_best, hits_best;
        cin >> trees_best >> hits_best;

        for (int i = 1; i < n; i++) {
                string name_current;
                cin >> name_current;
                int trees_current, hits_current;
                cin >> trees_current >> hits_current;

                if ( (trees_current > trees_best) ||
                     ( (trees_current == trees_best ) && (hits_current < hits_best) ) )
                  {
                      name_best = name_current;
                      trees_best = trees_current;
                      hits_best = hits_current;
                  }
        }

        cout << name_best << endl;
        return 0;
}
```

Problem D. Последовательность

Input file: *standard input*
Output file: *standard output*
Time limit: 1 секунда
Memory limit: 512 мебибайт

Обратим внимание, что количество букв 'D' в нулевой строке равно $2^0 = 1$; в каждой новой строке количество букв 'D' удваивается. Кроме того, буква 'D' добавится на четвёртом шаге. То есть в четвёртой строке будет $2^4+1 = 17$ букв 'D'. После этого строка удвоится ещё четыре раза. Получаем, что количество букв 'D' в восьмой строке равно $(2^4 + 1) \cdot 2^4 = 272$.

Problem E. R3D3

Input file: *standard input*
Output file: *standard output*
Time limit: 1 секунда
Memory limit: 64 мебибайта

Обозначим $dx = x_1 - x_c$, $dy = y_1 - y_c$, где (x_c, y_c) — координаты клетки, в которой находится R3D3.

Все шаги, начиная со второго, изменяют координаты на числа, кратные трём, так что после первого шага dx и dy должны делиться на 3.

Если dx и dy изначально делятся на 3, то единственным возможным действием является «стоять на месте». Выводим этот ход.

Если dx и dy оба не делятся на 3, то не существует способа сделать их кратными трём за один шаг, и способа добраться нет. Выводим сообщение о неудаче и заканчиваем выполнение программы.

В противном случае существует единственный ход, который делает обе координаты кратными трём. Выводим этот ход.

После очередного шага делим dx и dy на 3, так как все шаги становятся в три раза длиннее, и продолжаем процесс до тех пор, пока dx и dy не станет равным нулю.

Пример кода на C++:

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
int x1,x2,y1,y2;
char cu='U',cd='D',cr='R',cl='L'; // направления движения
int len=0;

string ans="";

cin >> x2 >> y2 >> x1 >> y1;

x1-=x2;

if (x1<0) { // если разность координат X отрицательна
  x1=-x1;  // работаем с положительными координатами
  cr='L';  // поменяв направления на противоположные
  cl='R';
 }
y1-=y2;

if (y1<0) { // то же самое для Y
   y1=-y1;
   cu='D';
   cd='U';
  }

while ( (x1!=0) || (y1!=0) )  {
  if ( (x1%3!=0) && (y1%3!=0) ) { // обе не делятся на 3?
    cout << "NO" << endl;  // решения нет
    return 0;
```

```
   }

  if (x1%3==1) {
    ans+=cr;
    x1--;
   }
   else if (x1%3==2) {
     ans+=cl;
     x1++;
    }
    else if (y1%3==1) {
      ans+=cu;
      y1--;
     }
     else if (y1%3==2) {
        ans+=cd;
        y1++;
       }
       else ans+='S';
  x1 = x1/3;
  y1 = y1/3;
 }

if (ans=="") ans="S";
cout << "YES" << endl << ans << endl;
return 0;
}
```