Выходи решать. Математика. 16 ноября.

1. После подведения итогов олимпиады «Выходи решать» оказалось, что каждый участник, решивший задачу №2, также решил и задачу №1. Кроме того, ровно 90% участников из числа не решивших задачу №2, также не решили и задачу №1. Сколько процентов участников решили задачу №2, если известно, что задачу №1 решили ровно 55% всех участников?

   (Ответом должно являться количество процентов — число от 0 до 100.)

   Ответ. 50.

   Решение.

   Пусть a участников решили задачу №2 (по условию они решили и задачу №1), и b участников не решили задачу №2. По условию, $0,9b$ участников не решили задачу №1 и значит, $0,1b$ участников решили задачу №1, но не решили задачу №2. Также известно, что $a + 0,1b$ составляет 55% от общего количества всех участников, равного $a + b$.

   Имеем $a + 0,1b = 0,55(a + b)$, откуда $0,45a = 0,45b$, т.е. $a = b$. Это означает, что задачу №2 решила равно половина всех участников.

2. Квадратный лист бумаги разрезали на восемь квадратов, семь из которых имеют площадь 25 см^2 каждый. Чему равна площадь оставшегося, восьмого квадрата?

   (Ответ выразите в квадратных сантиметрах.)

   Ответ. 225.

   Решение. Пусть $d \times d$ — размеры листа, $a \times a$ — размеры каждого из семи «маленьких» квадратов, $b \times b$ — размеры «большого» квадрата. Приравнивая площади, имеем $7a^2 = d^2 - b^2$.

   Одна из сторон листа целиком уложена маленькими квадратами, поэтому d равно целому кратному a, положим $d = na$. Легко видеть (например, продлив стороны большого квадрата до границ листа), что тогда и b равно целому кратному a, положим $b = ma$. Подставляя в равенство площадей и сокращая на a^2, получаем:
   $7 = n^2 - m^2$,
   $7 = (n - m)(n + m)$.
   Поскольку 7 — простое число, единственный вариант: $n - m = 1$, $n + m = 7$. Тогда $n = 4$, $m = 3$. Окончательно, площадь большого квадрата равна $m^2 \cdot a^2 = 9a^2 = 225$ см^2.

3. В прямоугольном треугольнике ABC проведены высота CH и биссектриса CD из вершины прямого угла C. Оказалось, что $AD = 2$, $BD = 1$. Найдите длину высоты CH.

   (Ответ выразите десятичной дробью с точностью до одного знака после запятой и введите в поле для ответа.)

   Ответ. $1,2$.

   Решение.

   Обозначим $BC = x$, $CH = h$.

   По свойству биссектрисы $BD : AD = BC : AC$, откуда $BC : AC = 1 : 2$ и $AC = 2x$.

   По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$ или $x^2 + 4x^2 = 3^2$, откуда $x^2 = 9/5$.

   Удвоенная площадь треугольника ABC равна $BC \cdot AC = 2x^2$. С другой стороны, она же равна $AB \cdot CH = 3h$. Отсюда $h = \frac{2x^2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{6}{5} = 1,2$.

4. На круговом велотреке из двух диаметрально противоположных точек одновременно стартовали два велосипедиста. Каждый из них едет со своей постоянной скоростью по часовой стрелке. Первый велосипедист едет быстрее, и поэтому иногда обгоняет второго. Известно, что время, прошедшее с момента старта до второго по счету обгона, равно 2 минуты. Найдите время, прошедшее с момента старта до пятого по счету обгона.

   (Ответ выразите в минутах.)

   Ответ. 6.

   Решение. Пусть v — разность скоростей велосипедистов (т.е. скорость, с которой более быстрый велосипедист догоняет медленного). Тогда время t до первого обгона равно $(\frac{d}{2}) : v$, где d — длина полного круга. Далее от момента каждого обгона до момента следующего обгона быстрому велосипедисту надо снова «нагнать расстояние в полный круг», значит время между двумя последовательными обгонами равно $d : v = 2t$.

   Таким образом, время с момента старта до второго обгона равно $t + 2t = 3t$. Время с момента старта до пятного обгона равно $t + 4 \cdot 2t = 9t$. По условию $3t$ равно 2 минуты, откуда $9t$ равно 6 минут.

5. На острове Авалон живут рыцари, хитрецы и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда обманывают, а хитрецы на вопросы, заданные по очереди, то говорят правду, то обманывают, обязательно чередуя (ответ хитреца на первый вопрос может быть как правдой, так и ложью, а далее он чередует правдивые и лживые ответы). Каждому жителю острова Авалон было последовательно задано три вопроса: «Ты рыцарь?», «Ты лжец?», «Ты хитрец?». От всех жителей были получены ответы «да» или «нет». На первый вопрос ответили «да» ровно 100 жителей, на второй вопрос — ровно 25 жителей, а на третий вопрос — ровно 55 жителей. Какое наибольшее количество рыцарей может быть на острове Авалон?

   Ответ. 70.

   Решение.

   Обозначим количество рыцарей (Р) через k, количесттво лжецов (Л) — ℓ, количество хитрецов, которые отвечают на первый вопрос правдиво (Хп) — x, а количество хитрецов, которые отвечают на первый вопрос лживо (Хл) — y.

   Составим таблицу ответов на вопросы.

вопрос	ответ Р	ответ Л	ответ Хп	ответ Хл
№1. Ты рыцарь?	да	да	нет	да
№2. Ты лжец?	нет	нет	да	нет
№3. Ты хитрец?	нет	да	да	нет

   Видим, что Р и Хл дают одинаковые ответы на все вопросы! На первый вопрос получено $(k+y)+\ell$ ответов «да», на второй вопрос x ответов «да», а на третий вопрос — $\ell + x$ ответов «да». Из условия получаем:
   $(k+y)+\ell = 100$;
   $x = 25$;
   $\ell + x = 55$.

   Далее, $\ell = 55 - x = 55 - 25 = 30$, $k + y = 100 - \ell = 70$. Итак, общее количество Р и Хл равно 70, поэтому максимальное количество рыцарей равно 70 (при этом Хл отсутствуют).