23-я Столичная физико-математическая олимпиада МФТИ

Физика

Задания, решения

Общие указания по проведению

Время для решения заданий каждого класса — 2 часа.

Черновики не проверяются.

Каждая задача по физике оценивается целым числом баллов от 0 до 10.

Максимальное число баллов за олимпиаду 50.

Общие принципы выставления оценки по физике:

- правильное решение — 10 баллов;
- решение с недочетами — 7-9 баллов;
- решение с пропущенными важными частями — 4-5 баллов;

Во всех задачах, если это не оговорено специально, только верный ответ без обоснований стоит 0 баллов.

В работе все места с ошибками должны быть отмечены!

Ф8.1-1 Первые 2 часа велосипедист ехал на север и переместился на 19 км. Весь следующий час он двигался на восток и преодолел путь 9 км. Затем велосипедист время 20 мин двигался на юг и проехал 5 км, после чего проехал ещё за 40 мин расстояние 7 км на запад. Вычислите путь велосипедиста. Найдите его среднюю скорость.

Решение. Полный путь равен $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ **(4 балла)**. Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$ **(4 балла)**.

Ответ. $S = 40$ км, $v_{\text{ср}} = 10$ км/ч **(1+1 балл)**.

Ф8.2-1 Тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, может выдержать силу давления $F = 4050$ Н. Если давить на него поршнем гидравлического пресса, то какую силу нужно приложить к малому поршню, чтобы началась деформация? Площадь малого поршня в $n = 100$ раз меньше, чем площадь большого.

Решение. Используем равенство $\dfrac{F'}{S} = \dfrac{F}{nS}$ **(8 баллов)**, где F' — минимальная сила, с которой требуется давить. Тогда $F' = \dfrac{F}{n}$.

Ответ. $F' = 40{,}5$ Н **(2 балла)**.

Ф8.3-1 После удаления от железнодорожной станции на расстояние $S = 2$ км поезд массой $m = 800$ т развивает скорость $v = 60$ км/ч и продолжает движение с этой скоростью. Какую мощность развивает поезд при последующем движении? Коэффициент трения между колесом поезда и рельсом $\mu = 0{,}005$.

Решение. Если F — сила тяги, то поезд развивает мощность $N = F \cdot v$ **(4 балла)**. Эта сила уравновешивает силу трения качения: $F = \mu mg$ **(4 балла)**, откуда $N = \mu mgv$.

Ответ. $N = 6{,}5 \cdot 10^5$ Вт **(2 балла)**.

Ф8.4-1 U-образная трубка, открытая с обоих концов, состоит из трёх прямых трубок: двух вертикальных боковых и одной горизонтальной нижней, перпендикулярной первым двум. Сечения всех трубок одинаковы, постоянны и равны S. Длина нижней трубки l, а длины боковых — много больше l. Сначала в трубку заливают жидкость с плотностью $\rho_1 = 2\rho$ и объёмом $V_0 = 2lS$. Затем с одного конца приливают $V_1 = lS$ жидкости с плотностью $\rho_2 = (3/2)\rho$, а с другой — объём lS третьей жидкости с плотностью $\rho_3 = (1/2)\rho$. Найдите разность уровней жидкости в боковых трубках, если жидкости не перемешиваются.

Решение. Давления на основания боковых трубок должны быть равны **(3 балла)**. Пусть перепад уровней равен x. Из равенства давлений **(5 баллов)** находим: $\rho_3 gl + \left(\dfrac{l}{2} + \dfrac{x}{2}\right)\rho_1 g = \rho_2 gl + \left(\dfrac{l}{2} - \dfrac{x}{2}\right)\rho_1 g$, откуда $x\rho_1 = l(\rho_2 - \rho_3)$. Окончательно получаем: $x = \dfrac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1} l$ **(2 балла)**.

Ответ. $x = \dfrac{1}{2} \cdot l$.

Ф8.5-1 Путешественник выпал за борт парохода вместе со всем своим снаряжением. Капитан не пожалел свой любимый пробковый спасательный круг объёмом $V_1 = 0{,}15$ м^3 и кинул его путешественнику. Удержится ли схватившийся за круг путешественник на поверхности воды, если его масса вместе со снаряжением равна $m = 95$ кг?

Плотность пробки $\rho_{\text{п}} = 240$ кг/м^3, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, средняя плотность человека со снаряжением $\rho_{\text{ч}} = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Условие, при котором путешественник удержится на плаву — сила тяжести не должна превышать силу Архимеда, действующую на полностью погруженного в воду путешественника вместе со снаряжением и кругом **(7 баллов)**:

$$(m + V_1 \cdot \rho_{\text{п}})g \le \rho_{\text{в}} g \left(V_1 + \frac{m}{\rho_{\text{п}}} \right).$$

Численная проверка неравенства $m\left(1 - \dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{п}}}\right) \le V_1(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}})$ показывает, что путешественник удержится (15,83 кг $\le$ 114 кг) **(3 балла)**.

Ф8.1-2 Первые 3 часа велосипедист ехал на север и переместился на 25 км. Все следующие полчаса он двигался на восток и преодолел путь 8 км. Затем велосипедист время 30 мин двигался на юг и проехал 6 км, после чего проехал ещё за 25 мин расстояние 15 км на запад. Вычислите путь велосипедиста. Найдите его среднюю скорость.

Решение. Полный путь равен $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ **(4 балла)**. Средняя скорость равна отношению всего пути ко всему времени: $v_{\text{ср}} = \dfrac{S}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}$ **(4 балла)**.

Ответ. $S = 54$ км, $v_{\text{ср}} = 12{,}2$ км/ч **(1+1 балл)**.

Ф8.2-2 Тело, имеющее форму прямоугольного параллелепипеда, может выдержать силу давления $F = 3000$ Н. Если давить на него поршнем гидравлического пресса, то какую силу нужно приложить к малому поршню, чтобы началась деформация? Площадь малого поршня в $n = 50$ раз меньше, чем площадь большого.

Решение. Используем равенство $\dfrac{F'}{S} = \dfrac{F}{nS}$ **(8 баллов)**, где F' — минимальная сила, с которой требуется давить. Тогда $F' = \dfrac{F}{n}$.

Ответ. $F' = 60$ Н **(2 балла)**.

Ф8.3-2 После удаления от железнодорожной станции на расстояние $S = 3$ км поезд массой $m = 700$ т развивает скорость $v = 80$ км/ч и продолжает движение с этой скоростью. Какую мощность развивает поезд при последующем движении? Коэффициент трения между колесом поезда и рельсом $\mu = 0{,}005$.

Решение. Если F — сила тяги, то поезд развивает мощность $N = F \cdot v$ **(4 балла)**. Эта сила уравновешивает силу трения качения: $F = \mu mg$ **(4 балла)**, откуда $N = \mu mgv$.

Ответ. $N = 7{,}6 \cdot 10^5$ Вт **(2 балла)**.

Ф8.4-2 U-образная трубка, открытая с обоих концов, состоит из трёх прямых трубок: двух вертикальных боковых и одной горизонтальной нижней, перпендикулярной первым двум. Сечения всех трубок одинаковы, постоянны и равны S. Длина нижней трубки l, а длины боковых — много больше l. Сначала в трубку заливают жидкость с плотностью $\rho_1 = 3\rho$ и объёмом $V_0 = 2lS$. Затем с одного конца приливают $V_1 = lS$ жидкости с плотностью $\rho_2 = 2\rho$, а с другой — объём lS третьей жидкости с плотностью $\rho_3 = \rho$. Найдите разность уровней жидкости в боковых трубках, если жидкости не перемешиваются.

Решение. Давления на основания боковых трубок должны быть равны **(3 балла)**. Пусть перепад уровней равен x. Из равенства давлений **(5 баллов)** находим: $\rho_3 gl + \left(\dfrac{l}{2} + \dfrac{x}{2}\right)\rho_1 g = \rho_2 gl + \left(\dfrac{l}{2} - \dfrac{x}{2}\right)\rho_1 g$, откуда $x\rho_1 = l(\rho_2 - \rho_3)$. Окончательно получаем: $x = \dfrac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1} l$ **(2 балла)**.

Ответ. $x = \dfrac{1}{3} \cdot l$.

Ф8.5-2 Путешественник выпал за борт парохода вместе со всем своим снаряжением. Капитан не пожалел свой любимый пробковый спасательный круг объёмом $V_1 = 0{,}15$ м^3 и кинул его путешественнику. Удержится ли схватившийся за круг путешественник на поверхности воды, если его масса вместе со снаряжением равна $m = 100$ кг?

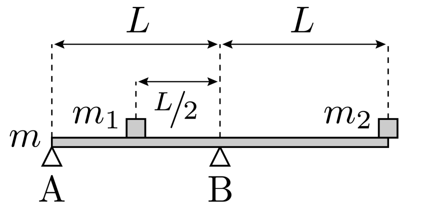
Плотность пробки $\rho_п = 240$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, средняя плотность человека со снаряжением $\rho_ч = 1{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Условие, при котором путешественник удержится на плаву — сила тяжести не должна превышать силу Архимеда, действующую на полностью погруженного в воду путешественника вместе со снаряжением и кругом **(7 баллов)**:

$$(m + V_1 \cdot \rho_п)g \leq \rho_в g \left(V_1 + \frac{m}{\rho_п} \right).$$

Численная проверка неравенства $m\left(1 - \dfrac{\rho_в}{\rho_п}\right) \leq V_1(\rho_в - \rho_п)$ показывает, что путешественник удержится (16,66 кг $\leq$ 114 кг) **(3 балла)**.

Ф9.1-1 Балка массой $m = 60$ кг свободно лежит на двух опорах A и B, расстояние между которыми $L = 1{,}2$ м, и выступает за опору на такую же длину. На середине промежутка AB (см. рис.) расположили груз массой $m_1 = 200$ кг, а на выступающий конец — груз массой $m_2 = 40$ кг. Определите реакции опор N_A и N_B. Размеры грузов малы по сравнению с L.



Решение. Условия равновесия (равенство сил **(1 балл)** и равенство нулю моментов относительно точки B **(3 балла)**):

$$\begin{cases} N_A + N_B = (m_1 + m_2 + m)g; \\ N_A L - mg\dfrac{L}{2} + m_2 g L = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $N_A = \left(\dfrac{m_1}{2} - m_2\right) g$, $N_B = \left(m + \dfrac{m_1}{2} + 2m_2\right) g$ **(2+2 балла)**.

Ответ. $N_A \approx 600$ Н, $N_B \approx 2400$ Н **(1+1 балл)**.

Ф9.2-1 На плоскую льдинку толщиной $H = 0{,}2$ м положили камень так, что льдина полностью погрузилась в воду, а камень при этом остался над поверхностью воды. Какова масса камня, если площадь льдины $S = 1$ м^2? С какой силой камень давит на льдину в воде?

Плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Объём льдины равен $V = HS$, а сила Архимеда, действующая на неё, $F_A = \rho_в g H S$ **(1 балл)**. Условие равновесия **(3 балла)**:

$$(m + HS\rho_л)g = \rho_в g H S,$$

где m — масса камня. Тогда находим $m = HS(\rho_в - \rho_л)$. **(3 балла)** Камень давит на льдину с силой $P = mg$ **(1 балл)**.

Ответ. $m \approx 20$ кг, $P = mg \approx 200$ Н **(1+1 балл)**.

Ф9.3-1 Резистор и лампы в количестве $n = 5$ включены последовательно. Для нормального накала всех нитей ламп требуется сила тока $I = 0{,}3$ А. Напряжение накала одной из ламп $V_1 = 30$ В, а других — по $V_2 = 6$ В. Чему равно сопротивление резистора, если напряжение источника питания $\mathscr{E} = 120$ В?

Решение. $\mathscr{E}$ источника равна сумме падений напряжений на резисторе и всех лампах **(8 баллов)**:

$$\mathscr{E} = IR + V_1 + (n-1)V_2,$$

откуда $R = \dfrac{\mathscr{E} - V_1 - (n-1)V_2}{I}$ **(1 балл)**.

Ответ. $R \approx 220$ Ом **(1 балл)**.

Ф9.4-1 U-образная трубка, открытая с обоих концов, состоит из трёх прямых трубок: двух вертикальных боковых и одной горизонтальной нижней, перпендикулярной первым двум. Сечения всех трубок одинаковы, постоянны и равны S. Длина нижней трубки l, а длины боковых — много больше l. Сначала в трубку заливают жидкость с плотностью $\rho_1 = 3\rho$ и объёмом $V_0 = 2lS$. Затем с одного конца приливают $V_1 = lS$ жидкости с плотностью $\rho_2 = \rho$, а с другой — объём lS третьей жидкости с плотностью $\rho_3 = \rho/2$. Найдите разность уровней жидкости в боковых трубках, если жидкости не перемешиваются.

Решение. Давления на основания боковых трубок должны быть равны **(3 балла)**. Пусть перепад уровней равен x. Из равенства давлений **(5 баллов)** находим: $\rho_3 gl + \left(\frac{l}{2} + \frac{x}{2}\right)\rho_1 g = \rho_2 gl + \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)\rho_1 g$, откуда $x\rho_1 = l(\rho_2 - \rho_3)$. Окончательно получаем: $x = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1} l$ **(2 балла)**.

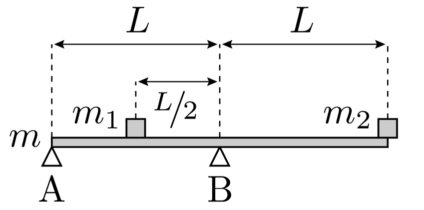
Ответ. $x = \frac{1}{6} \cdot l$.

Ф9.5-1 Поезд проезжает по прямолинейному тоннелю с постоянной скоростью. Время нахождения машиниста в тоннеле $t_1 = 23$ с. Время нахождения в тоннеле хотя бы части поезда равно $t_2 = 39$ с. Длина тоннеля $l = 240$ м. Определите длину и скорость поезда.

Решение. Пусть L — длина поезда, а v — его скорость. Тогда $t_1 = \frac{l}{v}$ **(2 балла)**, а $t_2 = \frac{L + l}{v}$ **(2 балла)**, откуда $v = \frac{l}{t_1}$ **(2 балла)**. Далее, $t_2 = \frac{l + L}{v} = t_1 + L\frac{t_1}{l}$, поэтому $L = \frac{t_2 - t_1}{t_1} l$ **(2 балла)**.

Ответ. $v = 10{,}4$ м/с, $L = 167$ м **(1+1 балл)**.

Ф9.1-2 Балка массой $m = 60$ кг свободно лежит на двух опорах A и B, расстояние между которыми $L = 1{,}6$ м, и выступает за опору на такую же длину. На середине промежутка AB (см. рис.) расположили груз массой $m_1 = 100$ кг, а на выступающий конец — груз массой $m_2 = 20$ кг. Определите реакции опор N_A и N_B. Размеры грузов малы по сравнению с L.



Решение. Условия равновесия (равенство сил **(1 балл)** и равенство нулю моментов относительно точки B **(3 балла)**):

$$\begin{cases} N_A + N_B = (m_1 + m_2 + m)g; \\ N_A L - mg\dfrac{L}{2} + m_2 g L = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим $N_A = \left(\dfrac{m_1}{2} - m_2\right) g$, $N_B = \left(m + \dfrac{m_1}{2} + 2m_2\right) g$ **(2+2 балла)**.

Ответ. $N_A \approx 300$ Н, $N_B \approx 1500$ Н **(1+1 балл)**.

Ф9.2-2 На плоскую льдинку толщиной $H = 0{,}3$ м положили камень так, что льдина полностью погрузилась в воду, а камень при этом остался над поверхностью воды. Какова масса камня, если площадь льдины $S = 0{,}5$ м^2? С какой силой камень давит на льдину в воде?

Плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Объём льдины равен $V = HS$, а сила Архимеда, действующая на неё, $F_A = \rho_в g HS$ **(1 балл)**. Условие равновесия **(3 балла)**:

$$(m + HS\rho_л)g = \rho_в g HS,$$

где m — масса камня. Тогда находим $m = HS(\rho_в - \rho_л)$. **(3 балла)** Камень давит на льдину с силой $P = mg$ **(1 балл)**.

Ответ. $m \approx 15$ кг, $P = mg \approx 150$ Н **(1+1 балл)**.

Ф9.3-2 Резистор и лампы в количестве $n = 6$ включены последовательно. Для нормального накала всех нитей ламп требуется сила тока $I = 0{,}4$ А. Напряжение накала одной из ламп $V_1 = 40$ В, а других — по $V_2 = 12$ В. Чему равно сопротивление резистора, если напряжение источника питания $\mathscr{E} = 220$ В?

Решение. $\mathscr{E}$ источника равна сумме падений напряжений на резисторе и всех лампах **(8 баллов)**:

$$\mathscr{E} = IR + V_1 + (n-1)V_2,$$

откуда $R = \dfrac{\mathscr{E} - V_1 - (n-1)V_2}{I}$ **(1 балл)**.

Ответ. $R \approx 300$ Ом **(1 балл)**.

Ф9.4-2 U-образная трубка, открытая с обоих концов, состоит из трёх прямых трубок: двух вертикальных боковых и одной горизонтальной нижней, перпендикулярной первым двум. Сечения всех трубок одинаковы, постоянны и равны S. Длина нижней трубки l, а длины боковых — много больше l. Сначала в трубку заливают жидкость с плотностью $\rho_1 = 2\rho$ и объёмом $V_0 = 2lS$. Затем с одного конца приливают $V_1 = lS$ жидкости с плотностью $\rho_2 = \rho$, а с другой — объём lS третьей жидкости с плотностью $\rho_3 = \rho/2$. Найдите разность уровней жидкости в боковых трубках, если жидкости не перемешиваются.

Решение. Давления на основания боковых трубок должны быть равны **(3 балла)**. Пусть перепад уровней равен x. Из равенства давлений **(5 баллов)** находим: $\rho_3 gl + \left(\frac{l}{2} + \frac{x}{2}\right)\rho_1 g = \rho_2 gl + \left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)\rho_1 g$, откуда $x\rho_1 = l(\rho_2 - \rho_3)$. Окончательно получаем: $x = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_1} l$ **(2 балла)**.

Ответ. $x = \frac{1}{4} \cdot l$.

Ф9.5-2 Поезд проезжает по прямолинейному тоннелю с постоянной скоростью. Время нахождения машиниста в тоннеле $t_1 = 25$ с. Время нахождения в тоннеле хотя бы части поезда равно $t_2 = 45$ с. Длина тоннеля $l = 300$ м. Определите длину и скорость поезда.

Решение. Пусть L — длина поезда, а v — его скорость. Тогда $t_1 = \frac{l}{v}$ **(2 балла)**, а $t_2 = \frac{L+l}{v}$ **(2 балла)**, откуда $v = \frac{l}{t_1}$ **(2 балла)**. Далее, $t_2 = \frac{l+L}{v} = t_1 + L\frac{t_1}{l}$, поэтому $L = \frac{t_2 - t_1}{t_1} l$ **(2 балла)**.

Ответ. $v = 12$ м/с, $L = 240$ м **(1+1 балл)**.

Ф10.1-1 Оцените разность показаний пружинных весов на экваторе и на полюсе Земли, если положить на них груз массой 150 кг. Весы калибровались на полюсе Земли. Считайте, что ускорение свободного падения на полюсе $g = 9{,}8$ м/с^2, а радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Весы измеряют силу, с которой на них действует груз. На экваторе груз будет двигаться с дополнительным ускорением, вызванным вращением Земли. Запишем второй закон Ньютона $ma = mg - N$ **(1 балл)** и выразим из него силу реакции опоры $N = m(g - a)$ **(1 балл)**. Показания весов — это сила реакции опоры, деленная на g **(2 балла)**:

$$m_1 = \frac{N}{g} = m\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

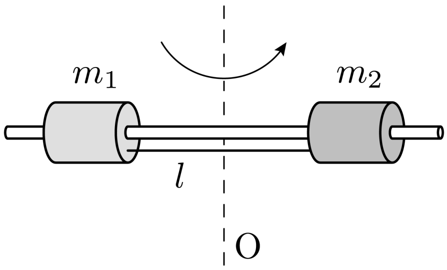
Вычислим ошибку показаний $m - m_1 = m\dfrac{a}{g}$. Ускорение, вызванное вращением Земли, запишется через период следующим образом **(3 балла)**:

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Ошибка показаний $\Delta m = m - m_1 = m\dfrac{4\pi^2 R}{gT^2}$ **(2 балла)**.

Ответ. $\Delta m = 0{,}52$ кг **(1 балл)**.

Ф10.2-1 Два цилиндра массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг связаны нерастяжимой нитью длиной $l = 1{,}5$ м и могут без трения перемещаться вдоль горизонтального стержня. Всю систему приводят во вращение с постоянной угловой скоростью так, что она совершает 1 оборот в секунду. Найдите расстояния от оси вращения до каждого из цилиндров, а также натяжение нити, если известно, что относительно стержня они находятся в состоянии покоя.



Решение. Введём в рассмотрение расстояния x_1 и x_2 от цилиндров m_1 и m_2 соответственно до оси вращения. Тогда $x_2 + x_1 = l$, а из II закона Ньютона натяжение нити $T = m_2\omega^2 x_2 = m_1\omega^2 x_1$ **(2 балла)**. Итак, на неизвестные величины x_1 и x_2 можно составить систему уравнений **(2+2 балла)**:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = l; \\ \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{m_1}{m_2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x_1 = l\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$, $x_2 = l\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ **(1+1 балл)**.

Ответ. $x_1 = 1$ м, $x_2 = 0{,}5$ м **(1 балл)**, $T = m_1\omega^2 x_1 = 39{,}5$ Н **(1 балл)**.

Ф10.3-1 Чтобы кипятильник за время $\tau = 10$ мин вскипятил воду массой $m = 1{,}2$ кг, никелиновую проволоку наматывают на фарфоровый цилиндр диаметром $D = 1{,}5$ см. Начальная температура воды $t = 10^\circ$, КПД установки $\eta = 60\%$, диаметр проволоки $d = 0{,}2$ мм, напряжение на ней 100 В. Найдите количество N витков проволоки, которые нужно было намотать.

Удельное сопротивление никелина $\rho_н = 7{,}3{\cdot}10^{-8}$ Ом·м, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К.

Решение. Сопротивление проволоки **(2 балла)**:

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{N \cdot \pi D}{\pi d^2/4} = \frac{4\rho DN}{d^2}.$$

Выделяющаяся теплота $\dfrac{U^2}{R}\tau$ **(2 балла)** идёт на нагревание воды $cm(t_{кип} - t)$ **(2 балла)** с учётом КПД **(2 балла)**:

$$Q = \eta\frac{U^2}{R}\tau = cm(t_{кип} - t).$$

После подстановки находим окончательно $N = \dfrac{\eta U^2 d^2 \tau}{4\rho D(t_{кип} - t)cm}$ **(1 балл)**.

Ответ. $N = 73$ **(1 балл)**.

Ф10.4-1 Шарик из стекла объёмом $V = 0{,}2$ см^3 равномерно падает в воде. Какая работа была совершена силами сопротивления за время, пока он прошёл расстояние $l = 4$ м?

Плотность стекла $\rho_с = 2{,}4$ г/см^3, плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Сила сопротивления может быть вычислена как разность силы Архимеда и силы тяжести, действующих на шарик **(4 балла)**: $F_{сопр} = Vg(\rho_с - \rho_в)$. Работа этой силы $A = F_{сопр}l = Vgl(\rho_с - \rho_в)$ **(5 баллов)**.

Ответ. $A = 1{,}1 \cdot 10^{-2}$ Дж **(1 балл)**.

Ф10.5-1 Лёд, в который вморожен свинцовый брусок, плавает в закрытом сосуде с водой при температуре $T = 273$ К, масса льда $M = 1$ кг, масса осколка $m = 0{,}5$ г. Вычислите количество теплоты, которое необходимо подвести, чтобы система «лёд-свинец» полностью погрузилась в воду.

Плотность воды $\rho_в = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_л = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность свинца $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Пусть M' — конечная масса льда, V — объём свинцового бруска, $V' = \dfrac{M'}{\rho_л}$ — конечный объём льда. Условие равновесия при полном погружении **(5 баллов)**:

$$(m + M')g = \rho_в g\left(\frac{m}{\rho_с} + \frac{M'}{\rho_л}\right),$$

откуда $M' = -m \cdot \dfrac{1 - \frac{\rho_в}{\rho_с}}{1 - \frac{\rho_в}{\rho_л}} = m \cdot \dfrac{\rho_с - \rho_в}{\rho_в - \rho_л} \cdot \dfrac{\rho_л}{\rho_с}$ **(2 балла)**. Искомое количество теплоты **(2 балла)** равно

$$Q = \lambda(M - M') = \lambda\left(M - m \cdot \frac{\rho_с - \rho_в}{\rho_в - \rho_л} \cdot \frac{\rho_л}{\rho_с}\right).$$

Ответ. $Q = 3{,}39 \cdot 10^5$ Дж **(1 балл)**.

Ф10.1-2 Оцените разность показаний пружинных весов на экваторе и на полюсе Земли, если положить на них груз массой 100 кг. Весы калибровались на полюсе Земли. Считайте, что ускорение свободного падения на полюсе $g = 9{,}8$ м/с^2, а радиус Земли $R = 6400$ км.

Решение. Весы измеряют силу, с которой на них действует груз. На экваторе груз будет двигаться с дополнительным ускорением, вызванным вращением Земли. Запишем второй закон Ньютона $ma = mg - N$ **(1 балл)** и выразим из него силу реакции опоры $N = m(g - a)$ **(1 балл)**. Показания весов — это сила реакции опоры, деленная на g **(2 балла)**:

$$m_1 = \frac{N}{g} = m\left(1 - \frac{a}{g}\right).$$

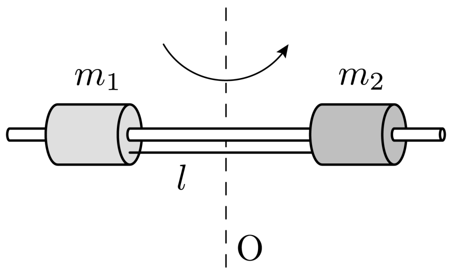
Вычислим ошибку показаний $m - m_1 = m\dfrac{a}{g}$. Ускорение, вызванное вращением Земли, запишется через период следующим образом **(3 балла)**:

$$a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

Ошибка показаний $\Delta m = m - m_1 = m\dfrac{4\pi^2 R}{gT^2}$ **(2 балла)**.

Ответ. $\Delta m = 0{,}35$ кг **(1 балл)**.

Ф10.2-2 Два цилиндра массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 1{,}5$ кг связаны нерастяжимой нитью длиной $l = 2$ м и могут без трения перемещаться вдоль горизонтального стержня. Всю систему приводят во вращение с постоянной угловой скоростью так, что она совершает 1 оборот в секунду. Найдите расстояния от оси вращения до каждого из цилиндров, а также натяжение нити, если известно, что относительно стержня они находятся в состоянии покоя.



Решение. Введём в рассмотрение расстояния x_1 и x_2 от цилиндров m_1 и m_2 соответственно до оси вращения. Тогда $x_2 + x_1 = l$, а из II закона Ньютона натяжение нити $T = m_2\omega^2 x_2 = m_1\omega^2 x_1$ **(2 балла)**. Итак, на неизвестные величины x_1 и x_2 можно составить систему уравнений **(2+2 балла)**:

$$\begin{cases} x_2 + x_1 = l; \\ \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{m_1}{m_2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x_1 = l\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}$, $x_2 = l\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$ **(1+1 балл)**.

Ответ. $x_1 = 1{,}5$ м, $x_2 = 0{,}5$ м **(1 балл)**, $T = m_1\omega^2 x_1 = 29{,}6$ Н **(1 балл)**.

Ф10.3-2 Чтобы кипятильник за время $\tau = 20$ мин вскипятил воду массой $m = 2$ кг, никелиновую проволоку наматывают на фарфоровый цилиндр диаметром $D = 2$ см. Начальная температура воды $t = 10°$, КПД установки $\eta = 60\%$, диаметр проволоки $d = 0{,}25$ мм, напряжение на ней 100 В. Найдите количество N витков проволоки, которые нужно было намотать.

Удельное сопротивление никелина $\rho_{\text{н}} = 7{,}3{\cdot}10^{-8}$ Ом·м, удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж/кг·К.

Решение. Сопротивление проволоки **(2 балла)**:

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho\frac{N \cdot \pi D}{\pi d^2/4} = \frac{4\rho DN}{d^2}.$$

Выделяющаяся теплота $\dfrac{U^2}{R}\tau$ **(2 балла)** идёт на нагревание воды $cm(t_{\text{кип}} - t)$ **(2 балла)** с учётом КПД **(2 балла)**:

$$Q = \eta\frac{U^2}{R}\tau = cm(t_{\text{кип}} - t).$$

После подстановки находим окончательно $N = \dfrac{\eta U^2 d^2 \tau}{4\rho D(t_{\text{кип}} - t)cm}$ **(1 балл)**.

Ответ. $N = 102$ **(1 балл)**.

Ф10.4-2 Мячик из керамики объёмом $V = 0{,}3$ см^3 равномерно падает в воде. Какая работа была совершена силами сопротивления за время, пока он прошёл расстояние $l = 5$ м?

Плотность материала мячика $\rho_{\text{м}} = 2{,}3$ г/см^3, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Решение. Сила сопротивления может быть вычислена как разность силы Архимеда и силы тяжести, действующих на шарик **(4 балла)**: $F_{\text{сопр}} = Vg(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})$. Работа этой силы $A = F_{\text{сопр}}l = Vgl(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})$ **(5 баллов)**.

Ответ. $A = 1{,}9 \cdot 10^{-2}$ Дж **(1 балл)**.

Ф10.5-2 Лёд, в который вморожен свинцовый брусок, плавает в закрытом сосуде с водой при температуре $T = 273$ К, масса льда $M = 1{,}2$ кг, масса осколка $m = 0{,}6$ г. Вычислите количество теплоты, которое необходимо подвести, чтобы система «лёд-свинец» полностью погрузилась в воду.

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность свинца $\rho_{\text{св}} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Пусть M' — конечная масса льда, V — объём свинцового бруска, $V' = \dfrac{M'}{\rho_{\text{л}}}$ — конечный объём льда. Условие равновесия при полном погружении **(5 баллов)**:

$$(m + M')g = \rho_{\text{в}}g\left(\frac{m}{\rho_{\text{с}}} + \frac{M'}{\rho_{\text{л}}}\right),$$

откуда $M' = -m \cdot \dfrac{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{с}}}}{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}}} = m \cdot \dfrac{\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} \cdot \dfrac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{с}}}$ **(2 балла)**. Искомое количество теплоты **(2 балла)** равно

$$Q = \lambda(M - M') = \lambda\left(M - m \cdot \frac{\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} \cdot \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{с}}}\right).$$

Ответ. $Q = 4{,}06 \cdot 10^5$ Дж **(1 балл)**.

Ф11.1-1 Мячик после падения на пол с высоты $H = 1$ м подскакивает на высоту $h = 0{,}5$ м. Продолжительность удара $t = 0{,}2$ с. Найдите среднюю (по времени) силу, с которой мячик действует на пол. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Масса мячика $m = 60$ г.

Решение. Скорость мяча перед ударом: $v_1 = \sqrt{2gH}$. Скорость мяча сразу после удара: $v_2 = \sqrt{2gh}$ **(1+1 балла)**. Изменение импульса мяча: $\Delta p = m(v_1 + v_2) = m\sqrt{2g}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$ **(4 балла)**. Тогда средняя сила $F_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} + mg = \dfrac{m}{t}\sqrt{2g}(\sqrt{H} + \sqrt{h}) + mg$. **(3 балла)**

Ответ. $F_{\text{ср}} = 2{,}86$ Н **(1 балл)**.

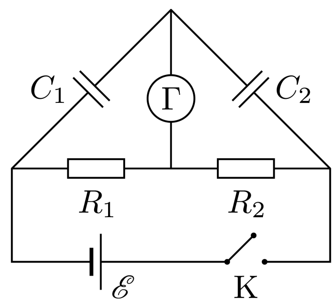
Ф11.2-1 Льдинка объёмом $V_1 = 200$ см^3 плавает в цилиндрическом сосуде диаметром $d = 5$ см. Какой объём льдинки выступает над водой? На какую величину изменится уровень воды в сосуде, если лёд растает?

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м^3.

Решение. Условие равновесия $g\rho_{\text{л}}V_1 = g\rho_{\text{в}}V_{\text{погр}}$ **(3 балла)**, откуда $V_{\text{погр}} = \dfrac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}V_1$. Тогда над водой выступает часть льдинки объёмом $V_1 - V_{\text{погр}} = V_1\left(1 - \dfrac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right)$ **(3 балла)**. Уровень воды не изменится (в любой момент времени вытесняется объём воды, равный $\dfrac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}$) **(3 балла)**.

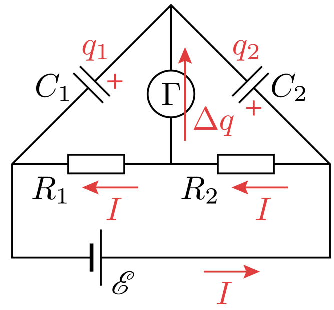
Ответ. Над водой выступает часть объёмом 20 см^3 **(1 балл)**.

Ф11.3-1 После замыкания ключа K_1 через гальванометр Г прошел заряд q. Чему равен этот заряд? При каком условии он будет равен нулю? Параметры цепи $\mathscr{E} = 10$ В, $C_1 = 200$ мкФ, $C_2 = 100$ мкФ, $R_1 = 30$ кОм, $R_2 = 10$ кОм.



Решение. После установления равновесия имеем **(1+1+1 балл)**:

$$\begin{cases} \mathscr{E} = I(R_1 + R_2); \\ IR_1 = \dfrac{q_1}{C_1}; \\ IR_2 = \dfrac{q_2}{C_2}. \end{cases}$$



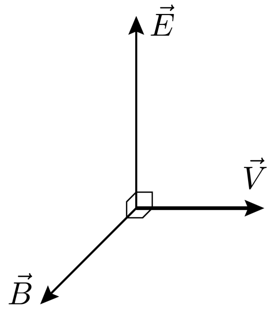
Из этой системы находим $q_1 = \dfrac{\mathscr{E}C_1R_1}{R_1 + R_2}$, $q_2 = \dfrac{\mathscr{E}C_2R_2}{R_1 + R_2}$ **(2 балла)**.
Тогда **(2 балла)**

$$\Delta q = \underbrace{+q_1 + (-q_2)}_{\text{в конце}} - \underbrace{0}_{\text{в начале}} = \frac{\mathscr{E}(C_1R_1 - C_2R_2)}{R_1 + R_2}.$$

Поэтому $\Delta q = 0$ при $C_1R_1 = C_2R_2$ **(2 балла)**.

Ответ. $\Delta q \approx 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ Кл **(1 балл)**.

Ф11.4-1 Пучок электронов влетает в пространство, где созданы однородные электрическое поле с напряженностью $E = 1$ кВ/м и перпендикулярное ему магнитное поле с индукцией $B = 1$ мТл. Скорости электронов при влёте в поля одинаковы и направлены перпендикулярно векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (см. рис.) Оказалось, что при дальнейшем движении скорость электронов не меняется. Найдите скорость движения электронов. Каков радиус кривизны траектории электронов, если электрическое поле выключить? Удельный заряд электрона равен $1{,}8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.



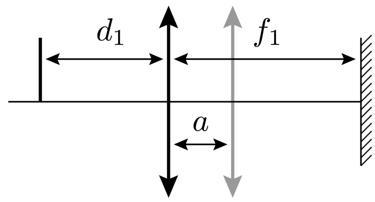
Решение. Поскольку сила Лоренца $\vec{F}_л$ гироскопическая и при данной конфигурации полей и скорости коллинеарна с силой $\vec{F}_E = q\vec{E}$, изменение модуля скорости эквивалентно изменению вектора $\vec{v}$ **(2 балла)**. Поскольку скорость по условию не меняется, эти две силы можно приравнять: $qBv = qE$ **(2 балла)**. Итак, $v = \dfrac{E}{B}$ **(2 балла)**.

Если выключить E, то из II закона Ньютона $\dfrac{mv^2}{R} = qBv$, откуда $R = \dfrac{mv}{qB} = \dfrac{mE}{qB^2}$ **(2 балла)**.

Ответ. $v \approx 10^6$ м/с, $R \approx 0{,}55$ см **(1+1 балл)**.

Ф11.5-1 Между экраном и источником света помещена тонкая линза, которая создает на экране при двух её положениях чёткое изображение источника. Расстояние между экраном и источником равно $A = 200$ см. Расстояние между двумя положениями линзы равно $a = 80$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Решение. Используем формулу тонкой линзы **(2 балла)**:



$$\begin{cases} A = d_1 + f_1 = d_2 + f_2, \\ \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{d_2} + \dfrac{1}{f_2}. \end{cases}$$

Будем считать, что $d_1 < d_2$.
Из второго равенства следует соотношение **(2 балла)**

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} = \frac{1}{A - d_2} - \frac{1}{A - d_1},$$

или, равносильно,

$$\frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} = \frac{d_2 - d_1}{(A - d_2)(A - d_1)}.$$

Приравнивая знаменатели, получим $d_1 = \dfrac{A - a}{2}$ **(1 балл)**, $d_2 = \dfrac{A + a}{2}$ **(1 балл)**.

Тогда $F = \dfrac{(A - a)(A + a)}{4A} = \dfrac{A^2 - a^2}{4A}$ **(3 балла)**.

Ответ. $F = 42$ см **(1 балл)**.

Ф11.1-2 Мячик после падения на пол с высоты $H = 1{,}5$ м подскакивает на высоту $h = 1$ м. Продолжительность удара $t = 0{,}2$ с. Найдите среднюю (по времени) силу, с которой мячик действует на пол. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Масса мячика $m = 100$ г.

Решение. Скорость мяча перед ударом: $v_1 = \sqrt{2gH}$. Скорость мяча сразу после удара: $v_2 = \sqrt{2gh}$ **(1+1 балла)**. Изменение импульса мяча: $\Delta p = m(v_1 + v_2) = m\sqrt{2g}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$ **(4 балла)**. Тогда средняя сила $F_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} + mg = \dfrac{m}{t}\sqrt{2g}(\sqrt{H} + \sqrt{h}) + mg$. **(3 балла)**

Ответ. $F_{\text{ср}} = 5{,}9$ Н **(1 балл)**.

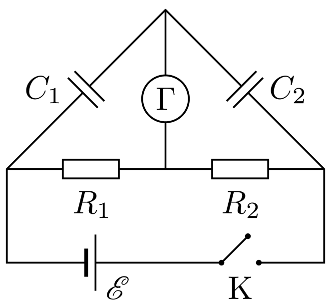
Ф11.2-2 Льдинка объёмом $V_1 = 100$ см^3 плавает в цилиндрическом сосуде диаметром $d = 4$ см. Какой объём льдинки выступает над водой? На какую величину изменится уровень воды в сосуде, если лёд растает?

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м^3.

Решение. Условие равновесия $g\rho_{\text{л}}V_1 = g\rho_{\text{в}}V_{\text{погр}}$ **(3 балла)**, откуда $V_{\text{погр}} = \dfrac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}V_1$. Тогда над водой выступает часть льдинки объёмом $V_1 - V_{\text{погр}} = V_1\left(1 - \dfrac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right)$ **(3 балла)**. Уровень воды не изменится (в любой момент времени вытесняется объём воды, равный $\dfrac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}$) **(3 балла)**.

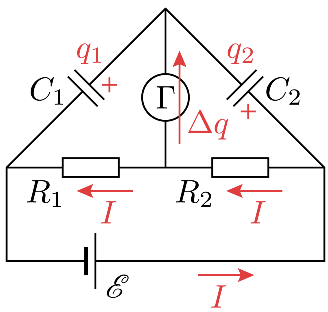
Ответ. Над водой выступает часть объёмом 10 см^3 **(1 балл)**.

Ф11.3-2 После замыкания ключа K_1 через гальванометр Г прошел заряд q. Чему равен этот заряд? При каком условии он будет равен нулю? Параметры цепи $\mathscr{E} = 10$ В, $C_1 = 100$ мкФ, $C_2 = 50$ мкФ, $R_1 = 20$ кОм, $R_2 = 10$ кОм.



Решение. После установления равновесия имеем **(1+1+1 балл)**:

$$\begin{cases} \mathscr{E} = I(R_1 + R_2); \\ IR_1 = \dfrac{q_1}{C_1}; \\ IR_2 = \dfrac{q_2}{C_2}. \end{cases}$$



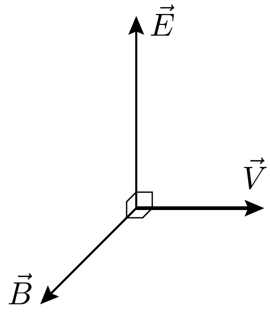
Из этой системы находим $q_1 = \dfrac{\mathscr{E}C_1R_1}{R_1 + R_2}$, $q_2 = \dfrac{\mathscr{E}C_2R_2}{R_1 + R_2}$ **(2 балла)**.
Тогда **(2 балла)**

$$\Delta q = \underbrace{+q_1 + (-q_2)}_{\text{в конце}} - \underbrace{0}_{\text{в начале}} = \frac{\mathscr{E}(C_1R_1 - C_2R_2)}{R_1 + R_2}.$$

Поэтому $\Delta q = 0$ при $C_1R_1 = C_2R_2$ **(2 балла)**.

Ответ. $\Delta q \approx 5 \cdot 10^{-4}$ Кл **(1 балл)**.

Ф11.4-2 Пучок электронов влетает в пространство, где созданы однородные электрическое поле с напряженностью $E = 0{,}5$ кВ/м и перпендикулярное ему магнитное поле с индукцией $B = 1{,}5$ мТл. Скорости электронов при влёте в поля одинаковы и направлены перпендикулярно векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (см. рис.) Оказалось, что при дальнейшем движении скорость электронов не меняется. Найдите скорость движения электронов. Каков радиус кривизны траектории электронов, если электрическое поле выключить? Удельный заряд электрона равен $1{,}8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг.



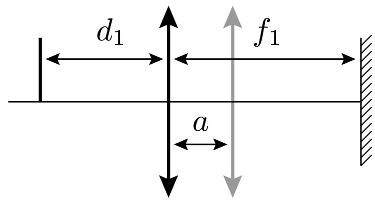
Решение. Поскольку сила Лоренца $\vec{F}_{\text{л}}$ гироскопическая и при данной конфигурации полей и скорости коллинеарна с силой $\vec{F}_E = q\vec{E}$, изменение модуля скорости эквивалентно изменению вектора $\vec{v}$ **(2 балла)**. Поскольку скорость по условию не меняется, эти две силы можно приравнять: $qBv = qE$ **(2 балла)**. Итак, $v = \dfrac{E}{B}$ **(2 балла)**.

Если выключить E, то из II закона Ньютона $\dfrac{mv^2}{R} = qBv$, откуда $R = \dfrac{mv}{qB} = \dfrac{mE}{qB^2}$ **(2 балла)**.

Ответ. $v \approx 3{,}3 \cdot 10^5$ м/с, $R \approx 0{,}12$ см **(1+1 балл)**.

Ф11.5-2 Между экраном и источником света помещена тонкая линза, которая создает на экране при двух её положениях чёткое изображение источника. Расстояние между экраном и источником равно $A = 100$ см. Расстояние между двумя положениями линзы равно $a = 20$ см. Определите фокусное расстояние линзы.

Решение. Используем формулу тонкой линзы **(2 балла)**:



$$\begin{cases} A = d_1 + f_1 = d_2 + f_2, \\ \dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{d_2} + \dfrac{1}{f_2}. \end{cases}$$

Будем считать, что $d_1 < d_2$.
Из второго равенства следует соотношение **(2 балла)**

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} = \frac{1}{A - d_2} - \frac{1}{A - d_1},$$

или, равносильно,

$$\frac{d_2 - d_1}{d_1 d_2} = \frac{d_2 - d_1}{(A - d_2)(A - d_1)}.$$

Приравнивая знаменатели, получим $d_1 = \dfrac{A - a}{2}$ **(1 балл)**, $d_2 = \dfrac{A + a}{2}$ **(1 балл)**.

Тогда $F = \dfrac{(A - a)(A + a)}{4A} = \dfrac{A^2 - a^2}{4A}$ **(3 балла)**.

Ответ. $F = 24$ см **(1 балл)**.